# מבנים אלגבריים תרגול 1

9 במרץ 2021

הגדרה: תהי $A$ קבוצה, ותהי $* : A \times A \to A$ פונקציה (נקראת אצלנו פעולה דו־מקומית). הזוג $(A, *)$ ייקרא:

- מאגמה אם מתקיימת סגירות: $\forall a, b \in A : a * b \in A$.
- אגודה אם בנוסף מתקיימת קיבוציות: $\forall a, b, c : (a * b) * c = a * (b * c)$.
- מונואיד אם בנוסף יש איבר יחידה: $\exists e \in A \forall a \in A : e * a = a * e = a$.
- חבורה אם בנוסף לכל איבר יש הופכי: $\forall a \in A \exists b : a * b = b * a = e$.

דוגמאות:

1. $(\mathbb{R}^{m\times n}, +)$.
סגירות: אכן בהינתן $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ אז $A + B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
קיבוציות: כיון שהחיבור הוא איבר איבר והחיבור בממשיים קיבוצי נקבל קיבוציות.
יחידה: מטריצת האפס.
הופכי: יש, $-A + A = 0$.
בסה"כ קיבלנו חבורה.

2. $(\mathbb{R}^{m\times n}, *)$ כאשר:

$$A * B = A \cdot B^t$$

עבור $m \neq n$ נקבל $A * B \in \mathbb{R}^{m\times m} \neq \mathbb{R}^{m\times n}$, ולכן אין סגירות.

3. $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \circ)$ כלומר, קבוצת הפונקציות מהטבעיים לעצמם, עם פעולת הרכבה.
סגירות: אכן, אם $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ אז $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
קיבוציות: בבדידה הוכחנו שההרכבה קיבוצית.

$$f \circ (g \circ h)(x) = f(g \circ h(x)) = f(g(h(x))) = f \circ g(h(x) = (f \circ g) \circ h(x)$$

יחידה: פונקציית הזהות $I(n)=n$.

הופכי: לא לכל איבר יש הופכי. ראינו שפונקציה היא הפיכה אמ"ם היא חח"ע, ועל. נשים לב לפונקציות:

$$f(n)=2n$$

$$g(n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n=2k\\ 17 & n=2k-1\end{cases}$$

קל לראות ש־ $f$ לא על, $g$ לא חח"ע, ולכן אינן הפיכות.

תדעו: פונקציה היא הפיכה מימין אמ"ם היא על ומשמאל אמ"ם היא חח"ע. ואכן כאן:

$$g\circ f(n)=g(f(n))=g(2n)=n\Rightarrow g\circ f=I$$

אבל

$$f\circ g(17)=f(g(17))=f(17)=34\neq 17$$

הערה: רואים כאן שחח"ע ועל אלו תכונות שאינן שקולות במקרה זה.

בסה"כ: מונואיד.

4. $(\{z\in\mathbb{C}:z^8=1\},\cdot)$.

סגירות: $z^8=1, w^8=1$ אז $(zw)^8=z^8w^8=1$.

קיבוציות: כפל במרוכבים הוא קיבוצי.

איבר יחידה: 1

הופכי: נשים לב שבעצם מדובר על המספרים $z_k=\text{cis}\frac{2\pi k}{8}, k\in\{0,\ldots,7\}$ ושמתקיים:

$$z_k\cdot z_{8-k}=\text{cis}\frac{2\pi k}{8}\cdot\text{cis}\frac{2\pi(8-k)}{8}=\text{cis}2\pi=1$$

ולכן $(z_k)^{-1}=z_{8-k}$ (עבור $k=0$ ניזכר $z_8=z_0$).

בסה"כ: חבורה (חבורת שורשי היחידה מסדר 8).

5. $\left(\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}|a,b\in\mathbb{R}\right\},\cdot\right)$.

סגירות: לפי כפל שורה השורה השנייה תמיד תישאר 0.

קיבוציות: בלינארית ראינו שכפל מטריצות קיבוצי.

איבר יחידה: נראה שיש אינסוף יחידות שמאליות, ולכן לפי ההרצאה שיחידה (דו"צ) יש רק אחת, נקבל שאין יחידה:

$$\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & c\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ולכן לכל $b$ המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ יחידה שמאלית, ולכן אין איבר יחידה (גם אין יחידה ימנית, כי אם יש ימנית ושמאלית אז היא דו"צ וראינו שאין דו"צ).
בסה"כ: אגודה.

6. $\left(\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{R}\right\}, \cdot\right)$
כאן תבדקו ותראו שזה חבורה, כלומר העובדה שדרגת המטריצות היא 0 לא אומרת שאין איבר יחידה.

7. $(\{0,1\}, \rightarrow)$
סגירות: כמובן שיש.
קיבוציות:

$$0 \rightarrow (1 \rightarrow 0) = 0 \rightarrow 0 = 1$$

$$(0 \rightarrow 1) \rightarrow 0 = 1 \rightarrow 0 = 0$$

אין קיבוציות ולכן זו מאגמה.

8. $(S_n = \{f : [n] \rightarrow [n] | f \text{ is invertible}\}, \circ)$, תמורות על $n$ איברים. כאשר $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. הערה: בגלל שמדובר על פונקציות מעל קבוצה סופית אז חח"ע אמ"ם על. כמה פונקציות הפיכות יש? $n!$.
סגירות וקביוצויות: ברור.
יחידה: פונקציית הזהות.
הופכי: לקחנו את קבוצת הפונקציות ההפיכות ולכן לכל איבר יש הופכי.
בסה"כ: חבורה. קוראים לה החבורה הסימטרית.