מתמטיקה בדידה – תרגיל 2

שאלה 1

תהיי X קבוצה. R נקרא חוג מעל X אם מתקיים:

א. $R \subseteq P(X)$.

ב. $\varnothing \in R$.

ג. $\forall A, B \in R$ מתקיים $(A \setminus B \in R) \wedge (A \cup B \in R)$.

הוכיחו ש $\forall A, B \in R$ מתקיים $A \cap B \in R$.

שאלה 2

תהיינה A, B קבוצות. הוכיחו כי $A \times B = B \times A$ אם ורק אם $A = B$ או $A = \phi$ או $B = \phi$.

שאלה 3

תהיינה A, B קבוצות סופיות. נגדיר $n = |A|, m = |B|, k = |A \cap B|$. הביעו בעזרת n, m, k את גודלן של הקבוצות הבאות. נמקו את קביעתכם.

1. $A \cup B$
2. $P(A) \,\Delta\, P(B)$
3. $(A \cap B) \times (B \cup A)$
4. $(P(A) \setminus \{A\} \setminus \{\phi\}) \times B$
5. $\big(P(A) \times P(B)\big) \cup \big(P(A \cup B) \times P(A \cap B)\big)$

שאלה 4

ציינו לכל אחד מהיחסים הבאים אם הוא רפלקסיבי סימטרי או טרנזיטיבי. אם מדובר ביחס שקילות, מצאו את מחלקות השקילות שלו.

א. $R_1 = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{N}, a < b\}$

ב. $R_2 = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{N}, a \leq b\}$

ג. $R_3 = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{N}, a = b\}$

שאלה 5

נתונה הקבוצה A ואוסף תת-קבוצות שלה $A_1, A_2, \ldots, A_n$ נגדיר יחס R <u>**על**</u> A ע"י:

$R = \{(x,y) :$ קיים i עבורו $x \in A_i$ וגם $y \in A_i\}$. הוכח או הפרך:

א. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A \Leftarrow R$ רפלקסיבי.

ב. R רפלקסיבי $\Leftarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.

ג. לכל $1 \leq i < j \leq n$ מתקיים: $A_i \cap A_j = \varnothing \Leftarrow R$ רפלקסיבית.

ד. R טרנזיטיבי $\Leftarrow$ לכל $1 \leq i < j \leq n$ מתקיים: $A_i \cap A_j = \varnothing$.

שאלה 6

תהי A קבוצה. יהיו S ו-R יחסי שקילות על A. הוכח או תן דוגמא נגדית לטענות הבאות:

א. $R \cup S$ יחס שקילות.

ב. $(A \times A) \setminus R$ יחס שקילות.

ג. $\left((A \times A) \setminus R\right) \cup I_A$ יחס שקילות.

ד. $R \setminus S$ יחס שקילות.

(I_A זהו יחס הזהות, לדוגמא אם $A = \{1,2,3\}$ אז $I_A = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$)

שאלה 7

א. תהי $\{F_i\}_{i \in I}$ משפחת קבוצות. הוכיחו לכל $j \in I$ ($I \neq \phi$) מתקיים $\bigcap_{i \in I} F_i \subseteq F_j \subseteq \bigcup_{i \in I} F_i$.

ב. תהי X קבוצה ותהי $A \subseteq X$ כך ש-$X \setminus A \neq \phi$. הוכיחו כי $\bigcap_{x \in X \setminus A} (X \setminus \{x\}) = A$.

שאלה 8

יהי E יחס שקילות על קבוצה A, ויהי F יחס שקילות על קבוצה B. תהי $G = \{((a_1,b_1),(a_2,b_2)) \mid (a_1,a_2) \in E, (b_1,b_2) \in F\}$. הוכח כי G הוא יחס שקילות על $A \times B$.

שאלה 9

יהי R יחס על הקבוצה $\mathbb{N}$ כך שלכל $x, y \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$xRy \Leftrightarrow \exists m,n \in \mathbb{N}, x^m = y^n .$$

א. הוכח כי R יחס שקילות.

ב. רשום במדויק את $[1]_R$, $[2]_R$ ו- $[49]_R$.