

## חשבון אינפי 1 - תרגיל בית 5

סמסטר א', 2015-2016

17 בנובמבר 2015

- ענו על כל השאלות הבאות. את מספר השאלה אותה בחרתי שתגישו תדעו ב-24.11 בשעה 9:55.

**הערה:** כשאני כותב "הוכח או הפרך" זה קיצור של הניסוח: "קרא את הטענה הבאה. אם היא נכונה, כתוב לה הוכחה מלאה. אחרת, הבא לה דוגמה נוגדית והראה מדוע היא סותרת את הטענה".

1. הוכיחו או הפריכו: תהי  $\{a_n\}$  סדרה אז קיימת לה תת סדרה מונוטונית.
2. תהי סדרה  $a_n \rightarrow -\infty$ . מצאו את  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ . שימו לב שבהרצאה עשיתם בדומה ומצאתם גבול זה עבור  $a_n \rightarrow \infty$ .
3. הוכיחו או הפריכו: נקבע פרמטר  $0 < \lambda < 1$ . תהי סדרה  $a_n$  המקיימת לכל  $n$ :  
 $|a_{n+2} - a_{n+1}| < \lambda |a_{n+1} - a_n|$ . אזי  $a_n$  מתכנסת.
4. הוכיחו או הפריכו: אם  $a_n$  סדרה כך שלכל  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  תת הסדרה  $\{a_{kn}\}_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת, אז  $a_n$  מתכנסת.
5. תהי  $M \subset \mathbb{R}$ ,  $\emptyset \neq M$  קבוצה סופית. תנו דוגמא לסדרה כך ש- $M$  היא קבוצת הגבולות החלקיים שלה.
6. תהי סדרה  $\{a_n\}$  כך ש:

$$|a_{n+1} - a_n| < 2$$

$$\liminf a_n \leq 1$$

$$\limsup a_n \geq 4$$

הראו שיש לסדרה זו לכל הפחות שלושה גבולות חלקיים.

7. הוכיחו את התכונות הבאות של של גבול עליון / תחתון עבור סדרה  $a_n$ :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq L \text{ אם } a_n \leq L \text{ החל ממקום מסויים, אזי}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \geq L \text{ אם } a_n \geq L \text{ החל ממקום מסויים, אזי}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq L \text{ אם } a_n \leq L \text{ עבור אינסוף } n\text{-ים, אזי}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq L \text{ אם } a_n \geq L \text{ עבור אינסוף } n\text{-ים, אזי}$$

בהצלחה ובהנאה!