תרגיל 6 אינפי 4

.1

(א) מצאו בסיס למרחב המשיק ומשוואות מישור משיק עבור המשטח הנתון על ידי

$$3x_1 + x_2^3 + 2x_3 + x_4^2 = 9$$
$$3x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 1$$

בנקודה $(1, -1, 3, -1)$.

פתרון. המרחב המשיק במקרה הזה הוא הגרעין של הדיפרנציאל

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + x_2^3 + 2x_3 + x_4^2 - 9, 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 - 1)$$

המשטח שלנו הוא בעצם קבוצת האפסים של הפונקציה הזאת. הדפירנציאל הוא

$$D_F = \begin{pmatrix} 3 & 3x_2^2 & 2 & 2x_4 \\ 3 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

בנקודה הרלוונטית $(1, -1, 3, -1)$ הדיפרנציאל הוא בעצם

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

עכשיו צריך רק למצוא גרעין. אם מדרגים את המטריצה מקבלים

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

אז נסמן $x_4 = t$ ו $x_2 = s$ וקל לבדוק שהפתרון הוא

$$(-3s + \frac{10}{3}t, s, -\frac{2}{3}t, t)$$

אז בסיס למרחב המשיק יהיה

$$\{(-3, 1, 0, 0), (10, 0, -2, 3)\}$$

עכשיו צריך למצוא משוואה למרחב משיק. כלומר משוואה שהפתרונות שלה הם בדיוק הוקטורים שמרחב אבל ברור שהמשוואה יכולה להיות מהצורה

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = d_1$$
$$-3x_3 - 2x_4 = d_2$$

אם נציב את הנקודה שיש לנו $(1,-1,3,-1)$ נקבל ש

$$d_1 = 8 \quad d_2 = -7$$

ולכן משוואה אפשרית היא:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 8 \\ -3x_3 - 2x_4 &= -7 \end{aligned}$$

(ב) מצאו בסיס למרחב המשיק עבור המשטח הנתון על ידי

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^3 + z &= 1 \\ x + 3y + z &= 2 \end{aligned}$$

בנקודה $(1,1,-2)$

פתרון. בדומה לתרגיל הקודם פשוט נשים לב שהדיפרנציאל הוא

$$D_F = \begin{pmatrix} 4x & 3y^2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

בנקודה $(1,1,-2)$ הדיפרנציאל הוא

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

נדרג ונגיע ל

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

נסמן $z = t$ ואז $y = -\frac{1}{3}t$ ו

$$x = 0$$

ולכן הפתרון הוא:

$$(0, -\frac{1}{3}t, t)$$

ובסיס למרחב המשיק יהיה

$$\{(0,-1,3)\}$$

2. חשבו את השטח של המשטח S במקרים הבאים:

(א)

$$S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad \sqrt{x^2+y^2} \le z\}$$

פתרון. נשים לב שבתחום המדובר $z \geq 0$, לכן ברור שאפשר לתאר את המשטח על ידי הגרף $(x, y, \sqrt{16 - x^2 - y^2})$ אבל צריך להבין מה התחום. נתון לנו ש

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z$$

היות ש $x^2 + y^2 = 16 - z^2$ נקבל ש

$$\sqrt{16 - z^2} \leq z$$

מכאן מגיעים בקלות ל

$$8 \leq z^2$$

ולכן

$$8 \leq 16 - x^2 - y^2$$

כלומר

$$x^2 + y^2 \leq 8$$

שזה תחום יפה ונחמד. אם נסמן $f(x) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ אז לפי נוסחא שטח הפנים שווה בעצם ל

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \leq 8} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \leq 8} \sqrt{1 + \frac{x^2}{16 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{16 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 8} \sqrt{\frac{16}{16 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

נבצע את החלפת המשתנים הפולארית המתבקשת

$$x = r \sin\theta \quad y = r \cos\theta$$

ונקבל את האינטגרל

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{\frac{16}{16 - r^2}} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$

נבצע הצבה

$$s = 16 - r^2$$

$$\mathrm{d}s = -2r\mathrm{d}r$$

ואז

$$-\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{16}^{8} \sqrt{\frac{16}{s}} \mathrm{d}s \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left(4\sqrt{s}\right)\Big|_8^{16} \mathrm{d}\theta = 2\pi(16 - 4\sqrt{8}) = 32\pi(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$$

(ב)

$$S = \{(x, y, z) \mid 3x - 3y + z = 12, \quad y^2 + z^2 \leq 1\}$$

פתרון. המשטח מתואר על ידי הגרף

$$(4+y-\frac{z}{3},y,z)$$

אז אם נסמן

$$f(y,z)=4+y-\frac{z}{3}$$

שטח הפנים נתון על ידי

$$\iint\limits_{y^2+z^2\le 1}\sqrt{1+(f'_y)^2+(f'_z)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$$

$$\iint\limits_{y^2+z^2\le 1}\sqrt{1+1+\frac{1}{9}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\sqrt{\frac{19}{9}}$$

3. יהי $a>0$ פרמטר. חשבו את השטח של המשטח $az=xy$ הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2\le a^2$.

פתרון. אפשר לתאר את המשטח על ידי הפרמטריזציה

$$(x,y,\frac{xy}{a})$$

ואז שוב לפי נוסחא שטח הפנים הוא

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{1+\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

נבצע הצבה פולארית

$$x=r\cos\theta \quad y=r\sin\theta$$

ונקבל

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{a}\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

נבצע הצבה

$$s=1+\frac{r^2}{a^2}$$

$$\mathrm{d}s=\frac{2r}{a^2}\mathrm{d}r$$

ונקבל

$$\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_1^{2}\sqrt{s}\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2\pi a^2}{3}(\sqrt{8}-1)$$

4. תהי $f(x)$ פונקציה חיובית המוגדרת בקטע $[a,b]$. כזכור, שטח הפנים של גוף סיבוב שלה סביב ציר x נתון על ידי הנוסחא

$$2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x$$

הוכיחו נוסחא זו באמצעות אחת הנוסחאות לשטח פנים שלמדנו.

פתרון. למעשה, בכל נקודה $x\in[a,b]$ המשטח יוצר את המעגל

$$y^2+z^2=(f(x))^2$$

אז אפשר לתאר את המשטח על ידי הפרמטריזציה

$$\varphi(x,\theta)=(x,f(x)\cos\theta,f(x)\sin\theta)$$

עכשיו

$$\begin{aligned}\varphi_x&=(1,f'(x)\cos\theta,f'(x)\sin\theta)\\ \varphi_\theta&=(0,-f(x)\sin\theta,f(x)\cos\theta)\end{aligned}$$

המכפלה הוקטורית היא

$$\varphi_x\times\varphi_\theta=(f(x)f'(x),-f(x)\cos\theta,-f(x)\sin\theta)$$

$$\begin{aligned}||\varphi_x\times\varphi_\theta||&=\sqrt{f^2(x)(f'(x))^2+f^2(x)\cos^2\theta+f^2(x)\sin^2\theta}\\ &=\sqrt{f^2(x)(f'(x))^2+f^2(x)}=f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\end{aligned}$$

והשטח המבוקש הוא

$$\int_a^b\int_0^{2\pi}f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x$$

כנדרש.