

תרגול כיתה 4 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקההתפלגויות (בדידות) מיוחדות

מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

נוסחאות:**התפלגות בינומית** $X \sim Bin(n, p)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

מ"מ X – סופר מספר ההצלחות ב n - ניסויי ברנולי (0 או 1). כאשר ההסתברות להצלחה בניסוי בודד היא p .

$(k = 0, \dots, n)$ – ההסתברות ל- k הצלחות מתוך n .
 התוחלת והשונות: $E(X) = n \cdot p$ $V(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

התפלגות גיאומטרית $X \sim Geo(p)$

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad k = 1, \dots, n$$

מ"מ X – סופר את מספר הנסיונות עד להצלחה הראשונה (כולל ההצלחה הראשונה).

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

הערה: להתפלגות גיאומטרית יש תכונת "חוסר זיכרון" ומתקיים
 $P(X = s+t | X = t) = P(X = s)$ לכל $s, t \geq 0$.

התפלגות פואסון $X \sim Poi(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

התוחלת והשונות: $E(X) = V(X) = \lambda$

התפלגות בינומית שלילית $X \sim NB(r, p)$

מ"מ X מייצג את מספר הניסויים שיש לבצע על מנת לקבל בדיוק r הצלחות.

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, \dots$$

$$E(X) = \frac{r}{p} \quad V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

התפלגות היפר-גיאומטרית $X \sim HG(m, N, n)$

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

בוחרים באקראי מדגם מגודל n , מתוך כד המכיל N כדורים m - לבנים ו $N-m$ שחורים.
 מ"מ X = מספר הכדורים הלבנים שנבחרו.

$$E(X) = \frac{nm}{N} \quad V(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p)$$

תרגיל 1

בכד יש כדור אדום וכדור כחול. בכל פעם מוציאים כדור באקראי ומחזירים אותו עם כדור נוסף באותו הצבע. הוכח שהתפלגות מספר הכדורים האדומים בשלב ה- n היא אחידה.

תרגיל 2

בכד n כדורים. מגרילים $X \sim Bin(n, p)$ וצובעים X מן הכדורים.

1. מוציאים כדור מן הכד. מה הסיכוי שהוא צבוע?
2. בלי להחזיר את הכדור הראשון, מוציאים כדור שני. מה הסיכוי שהוא צבוע?

תרגיל 3

שני שחקנים מחלקים ביניהם n מטבעות. מטילים את כולם. השחקן הראשון מקבל את אלו שנפלו על "עץ" והשני את אלו שנפלו על "פלי". לאחר מכן מטיל שוב כל שחקן את המטבעות שברשותו ומפסיד מתוכם את אלו שלא נפלו כבפעם הראשונה.

1. איך מתפלג הרווח של השחקן הראשון?
2. כעת שחקן אחד מטיל את כל המטבעות, אחד אחרי השני. מה ההסתברות שהרווח שלו יהיה לפחות 1 ולכל היותר k מיד אחרי שהטיל את המטבע ה- $2k$?

תרגיל 4

יואב וחנן זורקים לסל כדורים לסירוגין. יואב קולע בסיכוי 0.7 וחנן בסיכוי 0.4. חנן מתחיל. מה הסיכוי ששתי הקליעות הראשונות תהיינה רצופות?

תרגיל 5

מחלקת צנחנים כוללת 20 חפ"שים וקצין. המחלקה יוצאת למסלול. הסיכוי של חפ"ש לסיים הוא 0.8, בעוד שהקצין יסיים בביטחון מלא. הראשון שמגיע לקו הסיום מכין קפה לכל השאר. בהנחה שמתוך המסיימים לכל אחד יש סיכוי שווה להגיע ראשון, מהו הסיכוי שהקצין יכין את הקפה?