

פונקציות מרוכבות – תרגיל 10

1. פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)}$ לטור לורן בטבעת

א. $|z-2| > 2$ ב. $0 < |z-2| < 2$

2. נגדיר $g(z) = \frac{z^3}{e^{1/z^2}}$.

א. מצאו את טור לורן של $g(z)$ סביב $z_0 = 0$.

ב. חשבו את השארית $\text{Res}(g, 0)$.

3. מצאו את החלק העיקרי של טור לורן של הפונקציה $f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2+9)^2}$ סביב הנקודה $z_0 = 3i$.

4. נניח ש- $f(z)$ אנליטית בטבעת מהסוג $0 < |z| < R$.

א. האם ייתכן שטור לורן של $f(z)$ בטבעת זו מכיל רק חזקות $n \geq 0$, וטור לורן של $\frac{1}{f(z)}$ באותה

הטבעת מכיל רק חזקות $n \leq 0$? נמקו את תשובתכם.

ב. האם ייתכן שטור לורן של $f(z)$ בטבעת זו מכיל רק חזקות $n \geq 0$, וטור לורן של $\frac{1}{f(z)}$ באותה

הטבעת מכיל ∞ חזקות שליליות? נמקו.

5. נניח כי הפונקציות $f(z), g(z), r(z), h(z)$ אנליטיות בסביבה מנוקבת של הנקודה $z_0 \in \mathbb{C}$.
 עוד נניח כי ל- f קוטב מסדר 2 ב- z_0 , ל- g אפס מסדר 3 ב- z_0 , ל- r אפס מסדר 2 ול- h אפס מסדר 1. מהו סוג הסינגולריות של:

$$\text{א. } \frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)}$$

$$\text{ב. } \frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)}$$

בנקודה z_0 ?