תרגיל 2 - בורל קנטלי והתכנסויות של משתנים מקריים - תשע"ט

25 באפריל 2019

1. סיזיפוזה התרנגולת מטילה כל בוקר 3 ביצים. בלילה היא דוגרת על ביצה שלמה מקרית (הנבחרת באופן אחיד), וזו בוקעת עד הבוקר. מה הסיכוי שתוטל ביצה אשר תשאר שלמה עד סוף הימים?

   <u>**פתרון - התשובה היא לא! נפתור שלב אחרי שלב.**</u>

(א) אינטואיטיבית אנו חייבים כמובן להניח שסיזיפוזה היא "סופר־תרנגולת" החיה לנצח בלול בגודל אינסופי. אחרת, הפתרון לשאלה הוא טריוויאלי - כמובן שלא יכולה להיות ביצה אשר תשאר שלמה עד סוף הימים. לכן, תחת ההנחות הרלוונטיות:

- ביום הראשון 3 ביצים מגיעים לעולם ובסופו בוקעת 1. סה"כ נותרו 2 ביצים.
- ביום השני יש 5 ביצים בלול ובסוף היום בוקעת ביצה. סה"כ נותרו 4 ביצים.
- ביום השלישי יש 7 ביצים בלול ובסוף היום בוקעת ביצה. סה"כ נותרו 6 ביצים בלול.
- ביום ה־ n יש $2 \cdot n + 1$ ביצים בלול ובסופו בוקעת ביצה. סה"כ $2 \cdot n$ ביצים בלול.

(ב) נשים לב שמדובר במאורעות בדידים. כלומר, תמיד תהיה הסתברות חיובית לבחור בביצה כלשהיא לדגירה (גם אם מאוד מאוד קטנה).הבנת השאלה הזאת, מקורה, במובן מסוים, בשאלה האם קיימת פונקציה

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{2n+1}$$

חד חד ערכית ועל ($\mathbb{N}_{2n+1} = \{a\, is\, odd \,|\, a \in \mathbb{N}\}$. והתשובה היא שכן! ברור ש - $f(n) = 2n+1$ חח"ע ועל. לאור ההבנה הזאת. עם בחירה נכונה של המאורעות. נוכל לוודא כי סיזיפוזה דוגרת בחלוף **<u>אינסוף</u> ($\aleph_0$)** מהזמן על כל הביצים בלול. לאחר שהבנו את הסיטואציה הניצבת מולנו נשים לב כי מכיוון שמדובר במאורע אסימפטוטי, אם נגדיר את המאורעות באופן בלתי תלוי זה מזה אז לפי בורל קנטלי התוצאה תהיה מאורע טריוויאלי {0,1}.

(ג) מסך הכל מהתובנות שהעלנו נסיק כי עלינו להגדיר את המאורעות A_iבאופן בלתי תלוי כך שהסיכוי שתוטל ביצה אשר תשאר שלמה עד סוף הימים יהיה 0 כלומר $\mathbb{P}(A_i^c\, a.e) = 0$.

במילים אחרות, כל ביצה שסיזיפוזה תטיל, תמיד יהיה זמן i כלשהוא מאוד מאוד רחוק (או אולי מאוד קרוב) שסיזיפוזה בנקודה הזאת תצליח לדגור עליה.

(ד) נגדיר את A_i להיות המאורע כי ביום ה־i הביצה העתיקה ביותר בקעה (ההגדרה הזאת תלויה פעמיים ב־i, פעם ביום ופעם באיזו ביצה לדגור בכל יום). נראה כי

$$\mathbb{P}(\{A_n\, i.o\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, \forall_i \exists_{n>i}\, \omega \in A_n\}) = 1$$

כלומר נראה כי תמיד יהיה יום i כך שביחס אליו יהיה איזה יום מאוחר יותר n עבורו הביצה העתיקה ביותר בקעה.

(ה) מתקיים $\mathbb{P}(A_i) = \frac{Const}{2\cdot i+1}$ כמו כן, על פי נתוני השאלה, סיזיפוזה דוגרת על הביצים באופן בלתי תלוי. לכן, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i) = \infty$ לכן, לפי בורל קנטלי $\mathbb{P}(\{A_n\, i.o\}) = 1$ ואז $\mathbb{P}(\{A_n^c\, a.e\}) = 0$ כדרוש.

2. **הוכח: את הגרסה הבאה של בורל קנטלי למאורעות מוכלים.
אם מתקיים $\forall_k A_k \subseteq A_{k+1}$ אז $\mathbb{P}(A_n\, i.o) = 1$אם ורק אם קיימת סדרת אינדקסים $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$מונוטונית עולה כך ש־ $\sum\limits_k \mathbb{P}(A_{t_{k+1}} \,|\, A_{t_k}^c) = \infty$

<u>פתרון</u> מפנה למאמר בנושא־

$$https://www.researchgate.net/publication/$$

$$305978464 - A - counterpart - of - the - Borel - Cantelli - lemma$$

3. יהיו $X_1, X_2, ...$ משתנים מקריים בלתי תלויים המתפלגים נורמלית $N(0,1)$ כל אחד.
(הערה: $\forall_{X>0}:\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{1}{X} - \frac{1}{X^3})\cdot e^{-X^2/2} \le \mathbb{P}(N(0,1) \ge X) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{X} \cdot e^{-X^2/2}$
חשבו:

(א) $\mathbb{P}(\exists_N \forall_{n>N}\, max\{X_{n^2+1},...,X_{n^2+2n}\} > 5)$

i. **פתרון**

מתקיים

$$\mathbb{P}(\exists_N \forall_{n>N}\, max\{X_{n^2+1},...,X_{n^2+2n}\} > 5) =$$

$$1 - \mathbb{P}(\forall_N \exists_{n>N}\, max\{X_{n^2+1},...,X_{n^2+2n}\} \leq 5)$$

נסמן:

$$A_n = \{\omega \in \Omega \,|\, max\{X_{n^2+1}(\omega),...,X_{n^2+2n}(\omega)\} \leq 5\}$$

ואז נשים לב שבכתיב אחר ניתן לרשום:

$$A_n = \{\omega \in \Omega \,|\, max\{X_{n^2+1}(\omega),...,X_{n^2+2n}(\omega)\} \leq 5\} =$$

$$\{\omega \in \Omega \,|\, (X_{n^2+1}(\omega) \leq 5) \wedge ... \wedge (X_{n^2+2n}(\omega) \leq 5)\}$$

וזה מקל עלינו משמעותית כי $\forall_i X_i \sim N(0,1)$ ובלתי תלויים. כלומר

$$\mathbb{P}(A_n) = (\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, X_{n^2+1}(\omega) \leq 5\}))^{2n} = (p)^{2n}$$

מכיוון ש- $0 \leq p \leq 1$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty}(p)^{2n} < \infty$ ולכן, לפי בורל קנטלי $\mathbb{P}(A_n\, i.o) = 0$ ולכן,

$$\mathbb{P}(\exists_N \forall_{n>N}\, max\{X_{n^2+1},...,X_{n^2+2n}\} > 5) =$$

$$1 - \mathbb{P}(\forall_N \exists_{n>N}\, max\{X_{n^2+1},...,X_{n^2+2n}\} \leq 5) = 1 - \mathbb{P}(A_n\, i.o) = 1$$

וחישבנו את הדרוש.

(ב) $\mathbb{P}(\exists_N \forall_{n>N}\, max\{X_{n^2+1},...,X_{n^2+30}\} > 5)$

i. **פתרון**

מתקיים

$$\mathbb{P}(\exists_N \forall_{n>N}\, max\{X_{n^2+1},...,X_{n^2+30}\} > 5) =$$

$$1-\mathbb{P}(\forall_N \exists_{n>N}\, max\{X_{n^2+1},...,X_{n^2+30}\}\leq 5)$$

נסמן: $B_n=\{\omega\in\Omega\,|\,max\{X_{n^2+1}(\omega),...,X_{n^2+30}(\omega)\}\leq 5\}$. ואז
נשים לב שבכתיב אחר ניתן לרשום:

$$B_n=\{\omega\in\Omega\,|\,max\{X_{n^2+1}(\omega),...,X_{n^2+30}(\omega)\}\leq 5\}=$$

$$\{\omega\in\Omega\,|\,(X_{n^2+1}(\omega)\leq 5)\wedge...\wedge(X_{n^2+30}(\omega)\leq 5)\}$$

וזה מקל עלינו משמעותית כי $\forall_i X_i\sim N(0,1)$ ובלתי תלויים. כלומר

$$\mathbb{P}(B_n)=(\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega\,|\,X_{n^2+1}(\omega)\leq 5\}))^{30}=(p)^{30}$$

מכיוון ש־ $0\leq p\leq 1$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty}(p)^{30}=(p)^{30}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}1=\infty$ ולכן, לפי בורל קנטלי $\mathbb{P}(A_n\, i.o)=1$ (המאורעות ב"ת) ולכן,

$$\mathbb{P}(\exists_N\forall_{n>N}\, max\{X_{n^2+1},...,X_{n^2+30}\}>5)=$$

$$1-\mathbb{P}(\forall_N\exists_{n>N}\, max\{X_{n^2+1},...,X_{n^2+30}\}\leq 5)=1-\mathbb{P}(B_n\, i.o)=0$$

וחישבנו את הדרוש.

(ג) $\mathbb{P}(|X_n|>\sqrt{2\ln(n)}\, i.o)$

i. **פתרון**
נסמן

$$A_n=\{\omega\in\Omega\,|\,|X_n(\omega)|>\sqrt{2ln(n)}\}$$

נבקש לחשב $\mathbb{P}(A_n\, i.o)$. מכיוון ש $X_n(\omega)\sim N(0,1)$ וחיובי. אז על פי אי השיוויון מתקיים

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{1}{\sqrt{2ln(n)}}-\frac{1}{(\sqrt{2ln(n)})^3})\cdot e^{-(\sqrt{2ln(n)})^2/2}\leq\mathbb{P}(A_n)$$

$$\mathbb{P}(A_n)\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2ln(n)}}\cdot e^{-(\sqrt{2ln(n)})^2/2}$$

$$\mathbb{P}(A_n)\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{1}{\sqrt{2ln(n)}}-\frac{1}{(\sqrt{2ln(n)})^3})\cdot e^{-(\sqrt{2ln(n)})^2/2}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{1}{\sqrt{2ln(n)}} - \frac{1}{(\sqrt{2ln(n)})^3}) \cdot e^{-(2ln(n))/2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{1}{\sqrt{2ln(n)}} - \frac{1}{(\sqrt{2ln(n)})^3}) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\frac{1}{n \cdot \sqrt{ln(n)}} - \frac{1}{n \cdot (\sqrt{ln(n)})^3})$$

ולכן,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \geq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n \cdot \sqrt{ln(n)}} - \frac{1}{n \cdot (\sqrt{ln(n)})^3} \right] =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}} \left[\boldsymbol{\frac{1}{n \cdot \sqrt{ln(n)}}} \right] - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n \cdot (\sqrt{ln(n)})^3} \right] = \boldsymbol{\infty}$$

ולכן לפי בורל קנטלי $\mathbb{P}(A_n\, i.o) = 1$ כי נתון שהמשתנים המקריים בלתי תלויים ולכן, המאורעות המושרים על ידם ב"ת.

ד) $\mathbb{P}(|X_n| > \sqrt{3\ln(n)}\, i.o)$

i. **פתרון**

נסמן

$$A_n = \{\omega \in \Omega \,|\, |X_n(\omega)| > \sqrt{3ln(n)}\}$$

נבקש לחשב $\mathbb{P}(A_n\, i.o)$. מכיוון ש $X_n(\omega) \sim N(0,1)$ וחיובי. אז על פי אי השיוויון מתקיים

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{1}{\sqrt{3ln(n)}} - \frac{1}{(\sqrt{3ln(n)})^3}) \cdot e^{-(\sqrt{3ln(n)})^2/2} \leq \mathbb{P}(A_n)$$

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3ln(n)}} \cdot e^{-(\sqrt{3ln(n)})^2/2}$$

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3ln(n)}} \cdot e^{-(\sqrt{3ln(n)})^2/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3ln(n)}} \cdot \frac{1}{n^{1.5}} = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ln(n)}} \cdot \frac{1}{n^{1.5}}$$

ולכן,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ln(n)}} \cdot \frac{1}{n^{1.5}} = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.5} \cdot \sqrt{ln(n)}}$$

עתה, סך הכל מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n) \leq \frac{1}{\sqrt{6\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.5}\cdot\sqrt{ln(n)}} \leq \frac{1}{\sqrt{6\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.5}\cdot\sqrt{ln(n)}} < \infty$$

ולכן $\mathbb{P}(A_n\, i.o) = 0$ לפי בורל קנטלי, כדרוש.

4. יהי U מספר המתפלג $U \sim unif((0,1))$ כך ש־ $U = 0.X_1X_2...$ הייצוג העשרוני של U. הוכיחו כי בהסתברות 1, כל רצף סופי של ספרות מופיע בייצוג של U אינסוף פעמים. (עיינו בערך "מספר נורמלי").

(א) <u>**פתרון**</u>
נתון כי $U \sim unif((0,1))$ כלומר המספר U מתפלג באופן אחיד בקטע $(0,1)$. מהערך בויקיפדיה על מספר נורמלי ־ **"מספר נורמלי הוא מספר ממשי שהספרות שלו מתנהגות כאילו הוגרלו באקראי, כאשר לכל ספרה יש הסתברות שווה להופיע."** נגדיר את המאורע

$$A_{nk}^{(t)} = \{\omega \in \Omega \,|\, X_{nk}(\omega)X_{nk+1}(\omega)X_{nk+2}(\omega)...X_{nk+t}(\omega)\}$$

(כאשר בחרנו $n > t$ כלשהו ו־ t אורך שרשור של ספרות נתונות מהקבוצה $\{0,1,2,3,...,9\}$ החל מהנקודה ה־ $n \cdot k$). עתה, מתקיים

$$\{A_{nk}^{(t)}\}_{k=1}^{\infty}$$

אוסף מאורעות בלתי תלויים של שרשורי ספרות המופיעים במספר U החל מהמקום ה־ $n \cdot k$ אחרי הנקודה העשרונית. דאגנו לבחור $n > t$ ובכך לא לעסוק במאורעות המייצגים שרשור חופף של ספרות (כפינו אי תלות בין המאורעות כאשר מההנחה של מספר נורמלי $\forall_i X_i$ בלתי תלויים. מתקיים סך הכל

$$\mathbb{P}(A_{nk}^{(t)}) = \frac{1}{10^t}$$

ואז

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_{nk}^{(t)}) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{10^t} = \infty$$

והמאורעות בלתי תלויים ולכן לפי בורל קנטלי $\mathbb{P}(A_{nk}^{(t)}\, i.o) = 1$ כלומר כל רצף באורך t (סופי) מופיע החל מכל מקום אחרי הנקודה העשרונית של המספר U אינסוף פעמים. כדרוש.

5. יהיו $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 2 סדרות של משתנים מקריים המוגדרים על מרחב מדגם Ω.
הוכח: אם $X_n \xrightarrow{p} X$, $Y_n \xrightarrow{p} Y$ אז $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$ (הוכיחו ישירות).

(א) **<u>פתרון</u>**

i. נתון $X_n \xrightarrow{p} X$, $Y_n \xrightarrow{p} Y$ ולכן, עבור $n \in \mathbb{N}$ נגדיר את המאורעות:

$$A_n = \{\omega \in \Omega \,|\, |X_n - X| < \frac{\epsilon}{2}\}$$

$$B_n = \{\omega \in \Omega \,|\, |Y_n - Y| < \frac{\epsilon}{2}\}$$

ומתקיים

$$\forall_{\epsilon>0} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1,\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = 1$$

כמו כן, מתקיים

$$\mathbb{P}(A_n \cap B_n) = \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(A_n \cup B_n) \geq \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) - 1$$

לפיכך

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B_n) \geq \lim_{n\to\infty} (\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) - 1) = 1$$

לכן,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B_n) = 1$$

נגדיר:

$$C_n = \{\omega \in \Omega \,|\, |X_n - X| + |Y_n - Y| < \epsilon\}$$

$$D_n = \{\omega \in \Omega \,|\, |X_n - X + Y_n - Y| < \epsilon\}$$

ומתקיים מאי שיוויון המשולש:

$$|X_n - X + Y_n - Y| \leq |X_n - X| + |Y_n - Y|$$

ואז נסיק

$$A_n \cap B_n \subseteq C_n \subseteq D_n \Longrightarrow \mathbb{P}(A_n \cap B_n) \leq \mathbb{P}(C_n) \leq \mathbb{P}(D_n)$$

ii. סה"כ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}(D_n)=1$ $\forall_{\epsilon>0}$ ולכן, $X_n+Y_n\xrightarrow{p}X+Y$ כדרוש.

iii. כמובן, שניתן גם להסיק את התוצאה מהתרגול כי מתקיים $X_n+Y_n\xrightarrow{a.s}X+Y\Longrightarrow X_n+Y_n\xrightarrow{p}X+Y$.

6. יהיו $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים כך ש־ $X_n\sim Geometric(\frac{\lambda}{n})$ כאשר $\lambda>0$ קבוע כלשהו. נגדיר את סדרת המשתנים המקריים $Y_n=\frac{1}{n}X_n$. הוכח: $Y_n\xrightarrow{d}Exponential(\lambda)$.

(א) **פתרון**

$X_n\sim Geometric(\frac{\lambda}{n})$ ולכן,

$$\sum_{k=1}^{t}\mathbb{P}(X_n=k)=F_{X_n}(t)=F_{n\cdot Y_n}(t)=\sum_{k=1}^{t}\mathbb{P}(n\cdot Y_n=k)=\sum_{k=1}^{t}\mathbb{P}(Y_n=\frac{k}{n})=F_{Y_n}(\frac{t}{n})$$

$$\sum_{k=1}^{t}\mathbb{P}(Y_n=\frac{k}{n})=\sum_{k=1}^{t}\mathbb{P}(X_n=k)=\sum_{k=1}^{t}\frac{\lambda}{n}\cdot(1-\frac{\lambda}{n})^{k-1}=\frac{\frac{\lambda}{n}}{1-\frac{\lambda}{n}}\cdot\sum_{k=1}^{t}(1-\frac{\lambda}{n})^{k}$$

$$\sum_{k=1}^{t}\mathbb{P}(Y_n=\frac{k}{n})=\frac{\frac{\lambda}{n}}{1-\frac{\lambda}{n}}\cdot\sum_{k=1}^{t}(1-\frac{\lambda}{n})^{k}\Longrightarrow\sum_{k=1}^{t}\mathbb{P}(Y_n=\frac{k}{n})=\frac{\frac{\lambda}{n}}{(1-\frac{\lambda}{n})}\cdot(1-\frac{\lambda}{n})\cdot\frac{(1-\frac{\lambda}{n})^t-1}{(1-\frac{\lambda}{n})-1}$$

$$\sum_{k=1}^{t}\mathbb{P}(Y_n=\frac{k}{n})=\frac{\frac{\lambda}{n}}{(1-\frac{\lambda}{n})}\cdot(1-\frac{\lambda}{n})\cdot\frac{(1-\frac{\lambda}{n})^t-1}{(1-\frac{\lambda}{n})-1}=\frac{\lambda}{n}\cdot\frac{(1-\frac{\lambda}{n})^t-1}{-\frac{\lambda}{n}}=1-(1-\frac{\lambda}{n})^t$$

$$\sum_{k=1}^{t}\mathbb{P}(Y_n=\frac{k}{n})=1-(1-\frac{\lambda}{n})^t\overset{"t=n\cdot u"}{\Longrightarrow}\lim_{n\to\infty}F_{Y_n}(u)=\lim_{n\to\infty}1-(1-\frac{\lambda}{n})^{nu}=1-e^{-\lambda u}$$

$$\lim_{n\to\infty}F_{Y_n}(u)=1-e^{-\lambda u}\Longrightarrow Y_n\xrightarrow{d}Exponential(\lambda)$$

7. יהיו $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים כך ש־ $X_n\sim Binomial(n,\frac{\lambda}{n})$ כאשר $\lambda<n\in\mathbb{N}$ קבוע כלשהו. הוכח: $X_n\xrightarrow{d}Poisson(\lambda)$.

(א) **פתרון**

נתון $X_n\sim Binomial(n,\frac{\lambda}{n})$ לכן,

$$\lim_{n\to\infty}F_{X_n}(t)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n\le t)=\lim_{n\to\infty}\binom{n}{t}(\frac{\lambda}{n})^t\cdot(1-\frac{\lambda}{n})^{n-t}$$

$$= \lambda^t \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{t!(n-t)!} \cdot \frac{1}{n^t} \cdot (1-\frac{\lambda}{n})^{n-t} = \frac{\lambda^k}{t!} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{(n-t)!}}{n^t} \cdot (1-\frac{\lambda}{n})^n \cdot (1-\frac{\lambda}{n})^{-t} = \frac{\lambda^t \cdot e^{-\lambda}}{t!}$$

כי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{(n-t)!}}{n^t} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} (1-\frac{\lambda}{n})^n = e^{-\lambda}$$

$$\lim_{n\to\infty} (1-\frac{\lambda}{n})^{-t} = 1$$

אזי ניתן להסיק כי $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = \frac{\lambda^t \cdot e^{-\lambda}}{t!}$ ומתקיים $X_n \xrightarrow{d} Poisson(\lambda)$ כדרוש.

8. יהי $1 \leq r \leq s$. הוכח: אם $X_n \xrightarrow{L^s} X$ אזי $X_n \xrightarrow{L^r} X$. (רמז: כדאי להיעזר באי שיוויון $Holder$ המוכר מהקורס באנליזה מודרנית המקיים $\mathbb{E}[XY] \leq (\mathbb{E}[|X|^P])^{1/p}(\mathbb{E}[|Y|^q])^{1/q}$)

(א) **<u>פתרון</u>**

נשתמש ברמז - לפי אי־שיוויון הולדר מתקיים $\mathbb{E}[XY] \leq (\mathbb{E}[|X|^P])^{1/p}(\mathbb{E}[|Y|^q])^{1/q}$ כאשר $1 < p,q < \infty$ ו־ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. נבחר

$$X = |X_n - X|^r$$

$$Y = 1$$

$$p = \frac{s}{r} > 1$$

ואז נקבל $\mathbb{E}(|X_n - X|^r) \leq \mathbb{E}(|X_n - X|^s)^{\frac{1}{p}}$. עתה, מכיוון ש־ $X_n \xrightarrow{L^s} X$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^s) = 0$$

ואז $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^r) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^s)^{\frac{1}{p}} = 0$ נסיק

$$X_n \xrightarrow{L^r} X$$

כדרוש.

9. יהי X משתנה מקרי כלשהו. נגדיר $X_n = X+Y_n$. כאשר $\mathbb{E}[Y_n] = \frac{1}{n}$, $Var(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ ($\sigma > 0$ קבוע) הוכח כי $X_n \xrightarrow{p} X$.

(א) **<u>פתרון</u>**

תחילה נתון $X_n = X + Y_n$ לכן, $X_n - X = Y_n$. עתה, מתקיים

$$\forall_{\epsilon>0}\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon) = \mathbb{P}(|Y_n - \mathbb{E}[Y_n] + \mathbb{E}[Y_n]| > \epsilon) \leq$$

$$\mathbb{P}(|Y_n - \mathbb{E}[Y_n]| + \frac{1}{n} > \epsilon) = \mathbb{P}(|Y_n - \mathbb{E}[Y_n]| > \epsilon - \frac{1}{n}) \leq \frac{Var(Y_n)}{(\epsilon - \frac{1}{n})^2}$$

לפי אי־שיוויון צ'בישב. עתה,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{(\epsilon - \frac{1}{n})^2} = 0$$

ולכן $X_n \xrightarrow{p} X$ כדרוש.