תרגול 9

רציפות בהחלט:

הגדרה: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ נקראת רציפה בהחלט אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^{n}$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ אזי $\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\varepsilon$.

<u>תרגיל:</u> תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות בהחלט ו- c קבוע. הוכיחו:

א. cf רציפה בהחלט.

ב. $f+g$ רציפה בהחלט.

ג. fg רציפה בהחלט.

<u>פתרון:</u>

א. יהי $\varepsilon>0$ ע"פ הגדרת הרציפות בהחלט של f , עם $\varepsilon\mapsto\frac{\varepsilon}{|c|}$ נקבל כי קיים $\delta>0$ כך שאם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^{n}$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ אזי $\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\frac{\varepsilon}{|c|}$.

עבור אותו δ , בהינתן קטעים $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^{n}$ עם סכום אורכים קטן מ- δ , נקבל כי

$$\sum_{k=1}^{n}\left|cf(b_k)-cf(a_k)\right|=\sum_{k=1}^{n}|c|\left|f(b_k)-f(a_k)\right|=|c|\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|=<|c|\frac{\varepsilon}{|c|}=\varepsilon$$

ב. ע"פ הגדרת הרציפות בהחלט של f , ישנו $\delta_1>0$, כך שאם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^{n}$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ_1 אזי $\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. ע"פ הרציפות בהחלט של g ישנו $\delta_2>0$, כך שאם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^{n}$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ_2 אזי $\sum_{k=1}^{n}\left|g(b_k)-g(a_k)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. נגדיר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$ אם $\{[a_k,b_k]\}_{k=1}^{n}$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ אזי,

$$\sum_{k=1}^{n}\left|(f+g)(b_k)-(f+g)(a_k)\right|\le\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|+\sum_{k=1}^{n}\left|g(b_k)-g(a_k)\right|<\varepsilon$$

ג. f,g רציפות בקטע סגור, ולכן חסומות (כלומר $|f(x)|,|g(x)|\le M$ לאיזשהו M)

ע"פ הגדרת הרציפות בהחלט (לשתי הפונקציות) ישנו $\delta>0$ כך שאם $\left\{\left[a_k,b_k\right]\right\}_{k=1}^{n}$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- δ אזי $\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(b_k\right)-f\left(a_k\right)\right|,\sum_{k=1}^{n}\left|g\left(b_k\right)-g\left(a_k\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2M}$. עבור אותו δ נקבל:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\left(fg\right)\left(b_k\right)-\left(fg\right)\left(a_k\right)\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(b_k\right)g\left(b_k\right)-f\left(a_k\right)g\left(a_k\right)-f\left(b_k\right)g\left(a_k\right)+f\left(b_k\right)g\left(a_k\right)\right|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(b_k\right)\left(g\left(b_k\right)-g\left(a_k\right)\right)\right|+\sum_{k=1}^{n}\left|g\left(a_k\right)\left(f\left(b_k\right)-f\left(a_k\right)\right)\right|<2M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon$$

<u>הגדרה:</u> נאמר כי $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ מקיימת את **תנאי ליפשיץ**, אם יש קבוע L כך שלכל $x,y\in\left[a,b\right]$ מתקיים $\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\le L\left|x-y\right|$.

<u>תרגיל:</u>

א. הוכיחו כי אם $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ מקיימת את תנאי ליפשיץ, אזי היא רציפה בהחלט.

ב. נניח כי $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ היא ממחלקה C^1 (גזירה ברציפות). הוכיחו כי היא מקיימת את תנאי ליפשיץ.

<u>פתרון:</u>

א. יהי $\varepsilon>0$. נניח כי $\left\{\left[a_k,b_k\right]\right\}_{k=1}^{n}$ הם קטעים זרים שסכום אורכם קטן מ- $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$, אם כך

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(b_k\right)-f\left(a_k\right)\right|\le\sum_{k=1}^{n}\left|L\left|b_k-a_k\right|\right|<\varepsilon$$

ב. מהנתון f' רציפה בקטע הסגור $\left[a,b\right]$ ולכן חסומה שם ($\left|f'\left(x\right)\right|\le M$). יהיו $x,y\in\left[a,b\right]$ כלשהם, ע"פ משפט הערך הממוצע של לגראנז' מתקיים $\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|=\left|f'\left(\xi\right)\left(x-y\right)\right|=\left|f'\left(\xi\right)\right|\left|x-y\right|\le M\left|x-y\right|$ עבור ξ כלשהו בין x ל- y.

וזהו בדיוק תנאי ליפשיץ.

משפט (הרחבה למשפט היסודי של החדו"א ב'): תהי f מוגדרת ורציפה בהחלט ב $\left[a,b\right]$. אזי $f'\left(x\right)$ קיימת כב"מ ב $\left[a,b\right]$ ואינטגרבילית שם, ומתקיים

$$\int_a^b f'\left(x\right)=f\left(b\right)-f\left(a\right).$$

הערה: אם יש קפיצה של הפונקציה $f(x)$ אזי ברור כי לא יתקיים $\int_a^b f'(x)=f(b)-f(a)$ מכייון שהאינטגרל לא יסכום את הקפיצה. מצד שני התנאי ש $f(x)$ הינה רציפה בהחלט הכרחי.
לדוגמא, נניח כי $f(x)$ הינה פונקצית קנטור. ראינו בתרגול כי עבור פונקציית קנטור $f'(x)=0$ כב"מ. לכן

$$.\int_0^1 f'(x)dx=0\neq 1=f(1)-f(0)$$

למרות שפונקצית קנטור רציפה.

1. <u>תרגיל:</u> תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה בהחלט, $f'(x)\in\{0,1\}$ כב"מ (dm) ו-$f(0)=0$
2. קיימת קבוצה $A\subseteq[0,1]$, מדידה לבג כך ש-$f(x)=m(A\cap(0,x))$

פתרון:

$1\Leftarrow 2$ נגדיר $A:=\{x\in[0,1]: f'(x)=1\}$. בגלל ש-f רציפה היא מדידה, ולכן גם הנגזרת שלה f' מדידה (תרגול שעבר) ומכאן שהקבוצה A מדידה. עכשיו בגלל ש-f רציפה בהחלט:

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'dm=\int_0^x f'dm=\int_0^x I_A dm=\int_0^1 I_{A\cap(0,x)}dm=m(A\cap(0,x))$$

$2\Leftarrow 1$ $f(x)=m(A\cap(0,x))=\int_0^x I_A dm$ ומכאן f רציפה בהחלט (הכללת לבג חלק א')

ע"פ הכללת לבג $f'(x)=I_A(x)$ כב"מ, ולכן $f'(x)\in\{0,1\}$ כב"מ. ופשוט לראות כי $f(0)=0$.

משפט: פונקצית בורל f על הקטע $[a,b]$ הינה אינטגרבילית רימן אמ"מ קבוצת הנקודות שבה f איננה רציפה בקטע הינה בעלת מידת לבג 0 ואז אינגרל רימן שווה לאינטגרל לבג.

דוגמא: נניח כי $[a,b]=[0,1]$ וכי $f(x)=1_A$ כאשר A הינה קבוצת הרציונאליים. במקרה כזה נקבל כי הפונקציה f איננה רציפה באף נקודה ולכן איננה אינגרבלית רימן.

דוגמא: נגדיר את הפונקציה $f\left(x\right)$ להיות שווה לאפס אם x הינו אי-ראציונאלי ו $\frac{1}{q}$ כאשר x ראציונאלי ושווה ל $\frac{p}{q}$ בצורה מצומצמת. קל לראות כי הפונקציה איננה רציפה באף נקודה ראציוניאלית. לעומת זאת, אם x איננו ראציונאלי אזי לכל $\varepsilon>0$ יש מספר סופי של ראציונאליים כך ש $f\left(q\right)>\varepsilon$ לכן נוכל למצוא סביבה של x כך שלכל y כך ש $\left|y-x\right|<\delta$ מתקיים כי $\left|f\left(y\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon$. מכאן רואים כי f רציפה פרט למספר סופי של נקודות ולכן אינטגרבילית רימן והאינטגרל שווה ל 0.

<u>משפט:</u> נניח כי האינטגרל הלא אמיתי של f בקרן $\left[a,\infty\right)$ מתכנס בהחלט במובן רימן(ז"א $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f\left(x\right)\right|dx<\infty$ וגם כמובן $\int_{a}^{\infty}f^{+}dx,\int_{a}^{\infty}f^{-}dx<\infty$) אזי f אינט' לבג בקרן $\left[a,\infty\right)$ ומתקיים

$$\int_{a}^{\infty}f\left(x\right)dx=\int_{\left[a,\infty\right)}fdm$$

<u>הוכחה:</u> נגדיר סדרת פונקציות $g_n=f^{+}I_{\left[a,a+n\right]}$ אזי $\left\{g_n\right\}$ סדרה מונוטונית עולה של פונקציות אי-שליליות שגבולן f^{+} ומתקיים

$\int_{a}^{\infty}f^{+}\left(x\right)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{a+n}f^{+}\left(x\right)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\left[a,a+n\right]}f^{+}dm=\lim_{n\to\infty}\int_{\left[a,\infty\right)}g_n dm=\int_{\left[a,\infty\right)}f^{+}dm$. וכנ"ל f^{-}.