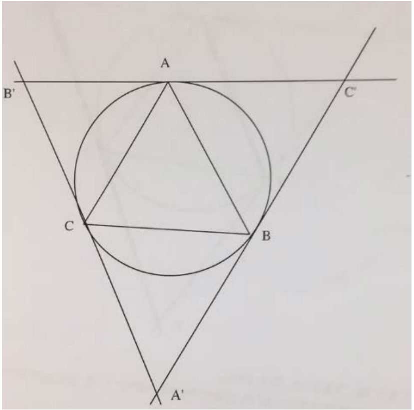
פתרון תרגיל 5 , גיאומטרי'ה אוקלידית, זהבית צבי

שאלה 1

נתבונן באיור הבא:



הוכיחו: AA', BB', CC' קונקורנטים.

הוכחה

נפעיל את משפט צ'בה ל- $\Delta A'B'C'$:

על-מנת ש- AA', BB', CC' יהיו קונקורנטים צריך להתקים:

$$\frac{B'C}{CA'}\cdot\frac{A'B}{BC'}\cdot\frac{C'A}{AB'}=1 \quad (*)$$

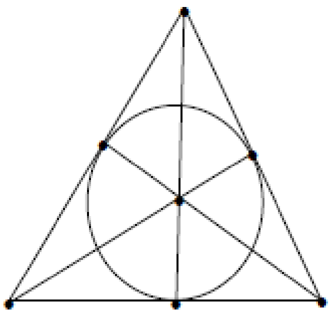
כיוון ש- $C'B'$, $A'B'$ ו- $C'A'$ משיקים – שני משיקים למעגל שיוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה

ולכן $\begin{cases} B'A = B'C \\ C'A = C'B \\ A'B = A'C \end{cases}$.

נציב את השוויונות ב- $(*)$ ונקבל 1 $\Leftarrow$ AA', BB', CC' קונקורנטים.

שאלה 2

מעגל γ משיק לצלעות המשולש ΔABC מבפנים. תהי D נקודת ההשקה על BC, E נקודת ההשקה על CA ו- F נקודת ההשקה על AB. בעזרת משפט צ'בה הוכיחו ש- AD, BE ו- CF נפגשים בנקודה אחת.



הוכחה

בכדי להראות כי AD, BE ו- CF נפגשים בנקודה אחת, עלינו להוכיח לפי משפט צ'בה כי מתקים:

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1 \quad (*).$$

שני משיקים היוצאים מאותה נקודה מחוץ למעגל שווים ולכן: $\begin{cases} AF = EA \\ FB = BD \\ DC = CE \end{cases}$.

נציב ב-(*) ונקבל: $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\underbrace{\frac{AF}{EA}}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{BD}{FB}}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{CE}{DC}}_{=1}=1$.

הוכחנו שהיחס הדרוש במשפט צב'ה שווה אחד ולכן AD, BE ו- CF נפגשים בנקודה אחת, כלומר קונקורנטים.

שאלה 3

הוכיחו כי הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

הוכחה

נתבונן ב- $\triangle ABC$ ונניח AD גובה ל BC , BE גובה ל AC ו- CF גובה ל AB , כלומר

$\begin{cases} AD \perp BC \\ BE \perp AC \\ CF \perp AB \end{cases}$. צריך להוכיח ששלושת הגבהים הנ"ל הם קונקורנטים, כלומר נפגשים בנקודה אחת.

נשתמש במשפט צ'בה.

תחילה, לפי: זוית $\sphericalangle B$ משותפת

ו- $\sphericalangle CFB = \sphericalangle ADB = 90^\circ$ לפי הנתון

נקבל דמיון משולשים לפי ז.ז: $\triangle ADB \sim \triangle CFB$.

לכן נקבל את היחס בין הצלעות המתאימות: $\frac{FB}{BD}=\frac{CF}{AD}$.

כעת, זוית $\sphericalangle C$ משותפת

ו- $\measuredangle BEC=\measuredangle ADC=90^\circ$ לפי הנתון

נקבל דמיון משולשים לפי ז.ז: $\triangle BEC\sim\triangle ADC$.

לכן נקבל את היחס בין הצלעות המתאימות: $\frac{DC}{CE}=\frac{AD}{BE}$.

וגם זווית $\measuredangle A$ משותפת

ו- $\measuredangle BEA=\measuredangle AFC=90^\circ$ לפי הנתון

נקבל דמיון משולשים לפי ז.ז: $\triangle BEA\sim\triangle AFC$.

לכן נקבל את היחס בין הצלעות המתאימות: $\frac{EA}{AF}=\frac{BE}{CF}$.

נכפול את היחסים שקיבלנו ונקבל:

$$\frac{FB}{BD}\cdot\frac{DC}{CE}\cdot\frac{EA}{AF}=\frac{CF}{AD}\cdot\frac{AD}{BE}\cdot\frac{BE}{CF}=1$$

ומכאן לפי משפט צ'בה מקבלים כי הגבהים AD,BE ו- CF קונקורנטים.

שאלה 4

המעגל החסום במשולש $\triangle ABC$ נוגע בצלעות BC,CA,AB בנקודות X,Y,Z בהתאמה.

המשך הקטע YZ פוגש את המשך הצלע BC בנקודה K .

הוכיחו: $\frac{BX}{XC}=-\frac{BK}{KC}$.

הוכחה

לפי הבניה, הנקודות K,Z,Y קוליניאריות והישר העובר דרכן חותך את הצלעות/המשכי הצלעות ב- $\triangle ABC$. לכן נשתמש במשפט מנלאוס: $\left|\frac{AZ}{ZB}\right|\cdot\left|\frac{BK}{KC}\right|\cdot\left|\frac{CY}{YA}\right|=-1$.

$AZ=YA$ משיקים היוצאים מאותה נקודה שווים

נציב ונקבל:

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot-\frac{BK}{CK}\cdot\frac{CY}{YA}=-1\Rightarrow\underbrace{\frac{AZ}{YA}}_{=1}\cdot-\frac{BK}{CK}\cdot\frac{CY}{ZB}=-1\Rightarrow\frac{BK}{CK}=\frac{ZB}{CY}$$

$ZB=BX$ משיקים היוצאים מאותה נקודה שווים

$CY=XC$ משיקים היוצאים מאותה נקודה שווים

ולכן נציב ונקבל: $\frac{BX}{XC}=\frac{BK}{CK}=-\frac{BK}{KC}$. מש"ל