פתרונות תוספת לתרגיל 3, זהבית צבי

2. נתונה המטריצה: $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\b&0&4\end{pmatrix}$.

א. בדקו האם המטריצה לכסינה עבור $b=3$, במידה וכן מצאו את המטריצה P המקיימת $P^{-1}AP=D$.

__פתרון:__ המטריצה היא: $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\3&0&4\end{pmatrix}$.

נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס: $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&1\\0&3-\lambda&0\\3&0&4-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\3&4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)\left[(2-\lambda)(4-\lambda)-3\right]=(3-\lambda)\left(8-2\lambda-4\lambda+\lambda^2-3\right)=(3-\lambda)\left(\lambda^2-6\lambda+5\right)$$

$$=(3-\lambda)(\lambda-5)(\lambda-1)=0\Rightarrow \lambda_1=3,\lambda_2=5,\lambda_3=1$$

כל הע״ע שונים ולכן המטריצה לכסינה.

כעת נחשב וקטורים עצמים באמצעות פתרון המערכת $(A-\lambda I)v=0$ עבור כל λ_i שמצאנו קודם.

__עבור__ $\lambda_1=3$:

$$\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\3&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3+3R_1\to R_3]{}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\0&0&4\end{pmatrix}\ 4z=0\Rightarrow z=0\ ,\ -x+z=0\Rightarrow z=x=0$$

נבחר שרירותית $y=1$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

__עבור__ $\lambda_2=5$:

$$\begin{pmatrix}-3&0&1\\0&-2&0\\3&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3+R_1\to R_3]{}\begin{pmatrix}-3&0&1\\0&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ -2y=0\Rightarrow y=0\ ,\ -3x+z=0\Rightarrow z=3x$$

נבחר שרירותית $x=1$ ונקבל מיד $z=3$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$.

<u>עבור</u> $\lambda_3=1$:

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\3&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3-3R_1\to R_3]{}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ 2y=0\Rightarrow y=0\ ,\ x+z=0\Rightarrow z=-x$$

נבחר שרירותית $z=1$ ונקבל מיד $x=-1$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

המטריצה המלכסנת היא: $P=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&3&1\end{pmatrix}$ והאלכסונית היא: $D=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

ב. האם נקבל מטריצה לכסינה עבור $b=-1$?

<u>פתרון</u>

המטריצה היא: $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-1&0&4\end{pmatrix}$.

נמצא את הפולינום האופייני ונשווה לאפס: $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&1\\0&3-\lambda&0\\-1&0&4-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\-1&4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)\left[(2-\lambda)(4-\lambda)+1\right]=(3-\lambda)\left(8-2\lambda-4\lambda+\lambda^2+1\right)=(3-\lambda)\left(\lambda^2-6\lambda+9\right)$$

$$=(3-\lambda)(\lambda-3)^2=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3$$

ערך עצמי עם ריבוי אלגברי 3.

כעת נחשב וקטורים עצמים באמצעות פתרון המערכת $(A-\lambda I)v=0$ עבור הערך העצמי שמצאנו קודם.

כיון שהמטריצה 3x3 ואנו צריכים 3 ו"ע , לא יתכן שנמצא 3 ו"ע בתל כי לא יתכן שכל השורות במטריצה יתאפסו כיון שלא מדובר במטריצת האפס. בכל אופן נחשב לתרגל את הנושא:

<u>עבור</u> $\lambda_1=3$:

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3+R_1\to R_3]{}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\ -x+z=0\Rightarrow z=x=t, y=s$$

נבחר שרירותית $s=1, t=0$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

כעת נבחר $s=0, t=1$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

יש שני ו״ע בת״ל בלבד, לכן הריבוי הגאומטרי הוא 2 ולא שווה לריבוי אלגברי, 3, ולכן המטריצה לא לכסינה.

- שימו לב: עבור $b=1$ מתקבלת מטריצה סימטרית ולפי משפט שלמדנו בכיתה היא לכסינה אורתוגונלית.

3. נתונה המטריצה: $A=\begin{pmatrix}m & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

א. מצאו לאילו ערכים של m המטריצה לכסינה?

<u>פתרון</u>

נמצא תחילה ערכים עצמים ע״י מציאת פולינום אופיני והשוואה לאפס: $|A-\lambda I|=0$:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}m-\lambda & 0 & 0\\ 1 & -\lambda & 0\\ 1 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}m-\lambda & 0\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left[(m-\lambda)(-\lambda)-0\right]$$

$$=(-\lambda)(1-\lambda)(m-\lambda)=0\Rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=m$$

- אם $m\neq 0$ וגם $m\neq 1$ מתקבלים בודאות 3 ע״ע שונים למטריצה, ולכן היא לכסינה. תשובה זו אינה מספיקה עבור סעיף זה, כיוון שחייבים לבדוק את המקרה שבו ניתן לקבל ע״ע עם ריבוי. זה קורה כאשר $m=0$ ו/או $m=1$. לכן, נותר לבדוק מה קורה עבור $m=0$ ו-$m=1$ - ובכל אחד מהמקרים לבדוק האם נקבל 2 וקטורים עצמים- כלומר שריבוי אלגברי יהייה שווה לריבוי גאומטרי.

<u>עבור</u> $m=0$: $\lambda_1=\lambda_3=0, \lambda_2=1$.

נבדוק מהו הריבוי הגיאומטרי של ע״ע $\lambda_1=\lambda_3=0$ (בעל ריבוי אלגברי 2).

כיוון אנו יודעים שעבור ע״ע עם ריבוי אלגברי 1, הריבוי אלגברי תמיד שווה לריבוי גאומטרי.

נפתור את המערכת: $(A-0\cdot I)v=0$:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2\to R_3}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&2&1\end{pmatrix}\quad x=0\,,\,2y+z=0$$

נבחר $y=1$ שרירותית ונקבל $z=-2$ ואז מקבלים ו״ע יחיד $v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$.

קיבלנו ריבוי גיאומטרי =1 שקטן ממש מריבוי אלגברי = 2, לכן המטריצה לא לכסינה.

עבור $m=1$: $\lambda_1=0\,,\,\lambda_2=\lambda_3=1$.

נבדוק ריבוי גיאומטרי של הע״ע $\lambda_2=\lambda_3=1$ (בעל ריבוי אלגברי 2).

נפתור את המערכת: $(A-1\cdot I)v=0$:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\1&2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2\to R_3}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\0&3&0\end{pmatrix}\quad x=y=0$$

נבחר $z=1$ שרירותית ונקבל ו״ע יחיד $v_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

ריבוי גיאומטרי הוא 1, קטן ממש מריבוי אלגברי, שהוא 2, לכן המטריצה לא לכסינה.

סיכום: המטריצה לכסינה רק כאשר $m\neq 0,1$.

ב. מה משתנה בתשובה לסעיף א׳ אם נשנה את המטריצה להיות: $A=\begin{pmatrix}m&0&0\\0&0&0\\1&2&1\end{pmatrix}$?

פתרון

שוב נתחיל מפולינום אופיני:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}m-\lambda&0&0\\0&-\lambda&0\\1&2&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}m-\lambda&0\\0&-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left[(m-\lambda)(-\lambda)-0\right]$$

$$=(-\lambda)(1-\lambda)(m-\lambda)=0\Rightarrow\lambda_1=0\,,\,\lambda_2=1\,,\,\lambda_3=m$$

החלוקה היא כמו בסעיף הקודם. נשים לב כי השינוי במטריצה בעמודה הראשונה וכיוון שחישבנו מינור לפי שורה ראשונה השינוי במטריצה לא פגע בתשובה של הע״ע נבדוק מה ישתנה בו״ע.
שוב, גם בסעיף זה כאשר $m\neq 0,1$ יש 3 ע״ע שונים והמטריצה לכסינה.

נבדוק שוב גם את המקרה שבו יכול להיווצר ע״ע עם ריבוי:

<u>עבור</u> $m=0$: $\lambda_1=\lambda_3=0\,,\,\lambda_2=1$.

נבדוק ריבוי גיאומטרי של הע״ע $\lambda_1=\lambda_3=0$ (בעל ריבוי אלגברי 2) כי בהכרח עבור ע״ע עם ריבוי אחד נמצא ו״ע אחד בדיוק.

נפתור את המערכת: $(A-0\cdot I)v=0$:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&2&1\end{pmatrix}\quad x+2y+z=0$$

קיבלנו שתי שורות אפסים ולכן נקבל בהכרח שני ו״ע בת״ל. לכן ריבוי אלגברי שווה לריבוי גיאומטרי עבור ע״ע $\lambda_1=\lambda_3=0$. לכן המטריצה לכסינה!

נמצא את הו״ע עבור $\lambda_1=\lambda_3=0$: נסמן $x=-2s-t\;,\;y=s\,,\,z=t$.

$s=1,t=0$: $x=-2$ ונקבל ו״ע: $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $s=0\,,t=1$: $x=-1$ ונקבל ו״ע: $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

כעת נמצא ו״ע עבור $\lambda_2=1$:

נפתור את המערכת: $(A-1\cdot I)v=0$ $\quad x=y=0$ $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\1&2&0\end{pmatrix}$

נבחר $z=1$ ונקבל ו״ע: $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

המטריצה המלכסנת היא: $P=\begin{pmatrix}-2&-1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ והאלכסונית היא: $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

<u>עבור</u> $m=1$: $\lambda_1=0\,,\,\lambda_2=\lambda_3=1$.

נבדוק ריבוי גיאומטרי של הע״ע $\lambda_2=\lambda_3=1$ (בעל ריבוי אלגברי 2).

נפתור את המערכת: $(A-1\cdot I)v=0$:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\1&2&0\end{pmatrix}\quad y=0\,,\,x=0$$

נבחר $z=1$ שרירותית ונקבל ו״ע <u>יחיד</u> $v_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

ריבוי גיאומטרי הוא 1, קטן ממש מריבוי אלגברי, 2, לכן המטריצה לא לכסינה.

בסה״כ המטריצה לכסינה כאשר $m \neq 1$.