תרגול 8 -אושרית

מרחב ניצב, משפט הפירוק הניצב

היטל וקטור על וקטור שונה מאפס

הגדרה. יהי V ומ, אז היטל של וקטור v על התת מרחב w (נסמן $W = Span\{w\}$) הוא וקטור $\pi_W(v)$ המקיים

1. $\pi_W(v) \in W$
2. $v - \pi_W(v) \in W^{\perp}$

הערה. יהיו v, w וקטורים אז

$$\pi_W(v) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2} w$$

תרגיל. מצאו את היטל של הווקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ על הווקטור $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

פתרון. לפי הערה

$$\pi_W(v) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1+2+3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ואכן מתקיים $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ו-$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W^{\perp}$

הטלת וקטור על תת מרחב

הטלה על תת מרחב:

יהא V ממ"פ, $W \subset V$ תת מרחב ו $v \in V$ אזי ההטלה של v על W הוא וקטור המסומן $\pi_W(v)$ ומקיים

- $\pi_W(v) \in W$
- $v - \pi_W(v) \in W^{\perp}$

איך נחשב את ההטלה?

פתרון: נניח כי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס אורתוגונלי של W. אזי מהתנאי הראשון קיימים סקלארים כך ש $\pi_W(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in W$. איך נמצא את המקדמים? מהתנאי השני נקבל כי לכל $1 \le j \le n$ מתקיים

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle v - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_j \right\rangle = \\ &= \langle v, v_j \rangle - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \langle v, v_j \rangle - \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle \end{aligned}$$

כל האינדקסים השונים התאפסו

ולכן

$\alpha_j = \frac{<v,v_j>}{||v_j||^2}$ כלומר $\pi_W(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{<v,v_i>}{||v_i||^2} v_i$ במילים אחרות: $\pi_W(v)$ הוא סכום ההטלות של v על כל איבר בסיס v_j בנפרד.

דוגמא:

מה ההטלה של $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ על $\}\ W = span\{v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\}$?

ראשית נמצא לו בסיס או"ג ע"י גרם שמידט

$$w_1 = v_1, w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1/2\\-1/2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

כעת נבדוק הטלות של $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ על איברי הבסיס:

ההטלה על $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ היא $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\frac{<\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}>}{||\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}||^2}$

ההטלה על $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ היא$\frac{1}{2}$

$$\frac{\left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle}{||\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}||^2}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{3/2}{6/4}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

ולכן ההטלה על התת מרחב היא

$$\frac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

טענה:

בסימונים לעיל $||v-\pi_W(v)|| = \min\{||v-w|| \mid w\in W\}$ (כלומר ההיטל הוא הנקודה הכי קרוב ב W ל v או הסטיה המינמאלית של v מ W מתקבלת ב u.)

הוכחה:

הוכחה: לכל $w\in W$ מתקיים כי
$||v-w||^2 = ||(v-\pi_W(v))+(\pi_W(v)-w)||^2 = ||v-\pi_W(v)||^2+||\pi_W(v)-w||^2 \ge ||v-\pi_W(v)||^2$ כאשר המעבר האמצעי הוא פיתרגורס.

הורדת גודל אי שלילי

הוספנו וחיסרנו את אותו גודל

המרחב הניצב:

במילים- מכיל את כל הוקטורים ב V שמאונכים לכל איברי הקבוצה S

הגדרה: יהי V ממ"פ, $S \subseteq V$ קב' כלשהי

המרחב הניצב ל- S → $S^{\perp} = \{ v \in V \mid \forall s_i \in S: v \perp s_i \}$

הערה: אפילו אם S לא תמ"ו עדיין $S^{\perp}$ תמ"ו!!

דוגמ: (1) $V^{\perp} = \{0\}$

הוכחה:

נוכיח הכלה דו כיוונית.

(⊇) ברור כי $\{0\} \subseteq V^{\perp}$ מוכל בכל תמ"ו.

(⊆) נראה כי $V^{\perp} \subseteq \{0\}$. יהי $v \in V^{\perp}$ ונרצה להראות כי $v \in \{0\}$ כלומר כי $v = 0$.

לפי הגד' מרחב ניצב נקבל כי לכל $x \in V$ מתקיים $\langle v, x \rangle = 0$ ובפרט עבור $x = v$ מתקיים $\langle v, v \rangle = 0 \leftrightarrow v = 0$

המשך דוגמאות למרחב הניצב:

② $\{0\}^{\perp}=V$

ב הוכחה: נוכיח הכלה דו כיוונית.

⊆ ברור. כל ת"מ של V מוכל ב-V.

⊇ נראה כי $V\subseteq\{0\}^{\perp}$. ברור - כי לכל $v\in V$ מתקיים $\langle 0,v\rangle=\langle v,0\rangle=0$ ולכן - אכן - מתקיים.

③ ניקח $V=\mathbb{R}^2$, $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ $\Leftarrow$ $S^{\perp}=sp\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

ציר ה y מאונך לציר ה x

איך מוצאים מרחב ניצב כשלא ברורה התשובה

כלל - אם $S=sp\{v_1,v_2,v_3\}$ ורוצים למצוא $S^\perp$ אז

$$S^\perp=\left\{v \;\middle|\; \begin{matrix}\langle v,v_1\rangle=0\\ \langle v,v_2\rangle=0\\ \langle v,v_3\rangle=0\end{matrix}\right\}$$

הדגמה בעמוד הבא

איך מוצאים מרחב ניצב כשלא ברורה התשובה

מ"פ סטנדרטית

$$S = sp\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\2\\5\end{pmatrix}\right\} \quad V = \mathbb{R}^4 \quad (4)$$

$$S^{\perp} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l}\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\right\rangle = 0 \\ \text{וגם} \\ \left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\5\end{pmatrix}\right\rangle = 0\end{array}\right\}$$

אזי

$$= \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l}x+2y+3z+4w=0\\ 3x-y+2z+5w=0\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&0\\3&-1&2&5&0\end{array}\right) \xrightarrow[\text{(2) } \frac{1}{7}R_2]{\text{(1) } R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&0\\0&1&1&1&0\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&2&0\\0&1&1&1&0\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-z-2w\\-z-w\\z\\w\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix} = sp\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

אינטואיציה לכיוון של ההכלה:לניצב של
S_2 יש להיות מאונךליותר דברים אז יש
פחות שמקיימים את זה.

נוסף

תרגיל: הוכח שאם $S_1 \subseteq S_2$ אזי $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$

נוסף

<u>תרגיל</u>: הוכח שאם $S_1 \subseteq S_2$ אזי $S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$

<u>הוכחה</u>: ניקח $v_2' \in S_2^{\perp}$

$$\Downarrow$$

$$\forall v_2 \in S_2 : \langle v_2', v_2 \rangle = 0$$

כיוון ש- $S_1 \subseteq S_2$ אזי בפרט לכל $v_1 \in S_1$ מתקיים

$$\langle v_2', v_1 \rangle = 0 \Rightarrow v_2' \in S_1^{\perp}$$

<u>מש"ל</u>

תרגיל: יהי V מ״פ, $U \subseteq V$ ת״מ, $U \neq V$.

צ״ל שקיים $\vec{x} \in V$ כך ש- $\vec{x} \perp U$ וגם ש- $\vec{x} \not\perp V$

פתרון: נגדיר בסיס ל-U : $\{w_1, \dots, w_k\}$

ונרחיב אותו לבסיס של V : $\{\underbrace{w_1, \dots, w_k}_{\text{בסיס של } U}, w_{k+1}, \dots, w_n\}$

נפעיל גראם שמידט על בסיס זה

ונקבל בסיס אונ׳: $\{\underbrace{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_k}_{\text{בסיס אונ׳ ל-} U}, \tilde{w}_{k+1}, \dots, \tilde{w}_n\}$

(כי בגראם שמידט בכל שלב זה פורש את אותו מרחב של המקוריים שפרשו אותו שלב קודם)

יהי,

$v = \alpha_1 \tilde{w}_1 + \dots + \alpha_k \tilde{w}_k + \alpha_{k+1} \tilde{w}_{k+1} + \dots + \alpha_n \tilde{w}_n$

$v \notin U$ ולכן בפרט $v \neq 0$

קיים $\alpha_i \neq 0$ עבור $i \geq k+1$ (כי אם $\alpha_i = 0$ לכל $i \geq k+1$ אז $v \in U$)

עבור אותו i נגדיר $\boxed{\vec{x} = \alpha_i \tilde{w}_i}$

נראה שהוא מקיים את התנאים המבוקשים:

1. נוכיח $\vec{x} \perp U$: יהי $u \in U$. אז ניתן להציג:

$u = \beta_1 \tilde{w}_1 + \dots + \beta_k \tilde{w}_k$

$\Rightarrow \langle u, \vec{x} \rangle = \langle \beta_1 \tilde{w}_1 + \dots + \beta_k \tilde{w}_k, \alpha_i \tilde{w}_i \rangle \underset{\text{לינאריות ברכיב ראשון}}{=}$

$$\beta_1 \langle \tilde{w}_1, \alpha_i \tilde{w}_i \rangle + \dots + \beta_k \langle \tilde{w}_k, \alpha_i \tilde{w}_i \rangle =$$

$$= \beta_1 \bar{\alpha}_i \underbrace{\langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_i \rangle}_{0} + \dots + \beta_k \bar{\alpha}_i \underbrace{\langle \tilde{w}_k, \tilde{w}_i \rangle}_{0} = 0$$

⇐ ולכן $\vec{x} \perp U$

② נניח $v \not\perp \vec{x}$: נוכיח באות 3 שנראה ש- $\langle v, \vec{x} \rangle \neq 0$

ואכן:

$$\langle v, \vec{x} \rangle = \langle \alpha_1 \tilde{w}_1 + \dots + \alpha_n \tilde{w}_n, \alpha_i \tilde{w}_i \rangle =$$

$$\overset{\text{כמו קודם}}{=} \dots = \alpha_1 \bar{\alpha}_i \underbrace{\langle \tilde{w}_1, \tilde{w}_i \rangle}_{0} + \dots + \alpha_i \bar{\alpha}_i \langle \tilde{w}_i, \tilde{w}_i \rangle + \dots + \alpha_n \bar{\alpha}_i \underbrace{\langle \tilde{w}_n, \tilde{w}_i \rangle}_{0}$$

$$\underset{\substack{\text{לכל } j \neq i \\ \langle \tilde{w}_j, \tilde{w}_i \rangle = 0}}{=} \alpha_i \bar{\alpha}_i \underbrace{\langle \tilde{w}_i, \tilde{w}_i \rangle}_{\substack{1 \\ \text{כי נרמלנו} \\ \text{כיוון}}} = |\alpha_i|^2 \underset{\text{כי } \alpha_i \neq 0}{\neq} 0$$

תרגיל:

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $U, W \subseteq V$ תתי מרחבים. **הוכיחו/הפריכו:**

א. $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$

ב. $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$

ג. $(U+W)^{\perp} = (U \cap W)^{\perp}$

פתרון:

א

להפרכה, נבחר-

$$\left\{\begin{array}{l} U=\{0\} \\ W=\underbrace{V}_{\text{שהינו מרחב האופס.}} \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\text{אגף שמאל}}$$

$$(U+W)^{\perp} \underset{\text{הגדרה}}{=} (\{0\}+V)^{\perp} \underset{\{0\}\leq V}{=} V^{\perp} \underset{\text{כידוע המשלים האורתוגונל}}{=} \{0\}$$

$$\boxed{\text{אגף ימין}}$$

$$U^{\perp}+W^{\perp}=\{0\}^{\perp}+V^{\perp}=V+\{0\}=V$$

ברור כי $V \neq \{0\}$

פתרון:

ב. $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$

ב

הוכחה: נוכיח הכלה דו כיוונית.

$(\subseteq)$ $v\in(U+W)^{\perp} \Leftarrow$ לכל $x\in U+W$ מתקיים $x\perp v$.

בפרט גם $u\in U$ ניתן לכתוב $\underset{U}{u}+\underset{W}{0} \in U+W$

ולכן $v\perp U$

בפרט גם $w\in W$ ניתן לכתוב $\underset{U}{0}+\underset{W}{w} \in U+W$

ולכן $v\perp W$

מכאן קיבלנו - $(v\perp U)\wedge(v\perp W)$

$\Downarrow$

$(v\in U^{\perp})\wedge(v\in W^{\perp})$

$\Downarrow$ לפי הגד' חיתוך

$v\in U^{\perp}\cap W^{\perp}$

מש"ל

ב

$v\in U^{\perp}\cap W^{\perp}$ ⊇

$v\in U^{\perp}$ וגם $v\in W^{\perp}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

1 $\forall u\in U \quad \langle v,u\rangle=0$

2 $\forall w\in W \quad \langle v,w\rangle=0$

יהי $v'\in U+W$ (צריכים $\langle v',v\rangle=0$) אזי: $\exists u'\in U,\ w'\in W:\ v'=u'+w'$

מתקיים

$\langle v',v\rangle=\langle u'+w',v\rangle=\langle u',v\rangle+\langle w',v\rangle=0$

לינאריות רכיב ראשון

מתאפס לפי 1

מתאפס לפי 2

ג. $(U+W)^{\perp} = (U \cap W)^{\perp}$

ג

הפרכה

$U = \{0\}$

$W = V$

שאינו מרחב האפס.

נחשב את 2 הצדדים -

$\boxed{\text{צד שמאל}}$

$$(U+W)^{\perp} = (\{0\}+V)^{\perp} = V^{\perp} = \{0\}$$

הצבה

לפי תרגיל בתחילת התרגול

$\boxed{\text{צד ימין}}$

$$(U \cap W)^{\perp} = (\{0\} \cap V)^{\perp} = (\{0\})^{\perp} = V$$

הצבה

תזכורת: סכום ישר

$U \oplus W = V$

1. $U + W = V$
2. $U \cap W = \{0\}$

משפט הפירוק הניצב:

יהי V ממ״פ מעל $\mathbb{F}$. $W \subseteq V$ תמ״ו

אזי:

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

דוגמא: ב- $\mathbb{R}^2$

$$W = sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$W^{\perp} = sp\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

אזי

$$W \oplus W^{\perp} = \mathbb{R}^2$$

דוג׳ נוספת: ראינו בתחילת התרגיל שעבור $V=\mathbb{R}^4$

ועבור $W=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\5\end{pmatrix}\right\}$ נקבל $W^\perp=sp\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

ניתן לבדוק שארבעת הווקטורים בת״ל ולכן אכן פורשים את

כל $\mathbb{R}^4$ והחיתוך בין W ל-$W^\perp$ הוא רק 0 ולכן

אכן מתקיים $W\oplus W^\perp=\mathbb{R}^4$

תרגיל:

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $U, W \subseteq V$ תתי מרחבים כך ש $U \oplus W = V$. **הוכיחו/הפריכו** $U^{\perp} = W$

פתרון:

הפרכה

$U = span\{(1,0)\}$ $\quad W = span\{(1,1)\}$ $\quad V = \mathbb{R}^2$

ראשית: נראה שמתקיימים תנאי השאלה:

$U + W := sp\{(1,0)\} + sp\{(1,1)\} = sp\{(1,0),(1,1)\} = \mathbb{R}^2 = V$

$U \cap W = sp\{(1,0)\} \cap sp\{(1,1)\} = \{0\}$

לכן אכן: $U \oplus W = V$

אך: $U^{\perp} = sp\{(0,1)\} \neq W$

תרגיל:

V ממ"פ, U תת"מ שלו.

הוכח/הפרך: $U = (U^\perp)^\perp$

הוכחה: נסמן לצורך נוחות

$\dim V = n$ $\quad \dim U = k$

לפי משפט הפירוק הניצב - מתקיים $U \oplus U^\perp = V$

לכן - לפי משפט ~~המימדים~~ המימדים מתקיים $\dim(U^\perp) = n-k$.

כמו כן - לפי משפט הפירוק הניצב מתקיים גם

$$\underbrace{\underbrace{U^\perp}_{\text{מימד } n-k} \oplus (U^\perp)^\perp = \underbrace{V}_{\text{מימד } n}}_{}$$

ולפי משפט המימ"מ

$$\dim((U^\perp)^\perp) = n-(n-k) = k$$

סה"כ - נשים ♡ שקיבלנו $\dim(U) = \dim((U^\perp)^\perp)$ כלומר - שוויון מימ"מ

כעת- נוכיח הכלה חד כיוונית.

נראה כי $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ יהי $u \in U$ ונוכיח להראות כי $u \in (U^\perp)^\perp$

לכל $x \in U^\perp$ מתקיים $\langle x,u \rangle = 0$ לפי הג' $U^\perp$

ולכן - $u \in (U^\perp)^\perp$

סה"כ - לפי הכלה חד כיוונית + שוויון מימדים

נקבל - את המבוקש. מש"ל

בהצלחה!!!