סמסטר א'

אלגברא לינארית 2

מועד א'

כז בשבט

12.02.18

מרצה: פרופ' בוריס קוניאבסקי

מתרגלים: אחיה בר-און, תמר נחשוני.

מספר הקורס: 88-113-05

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: מחשבון רגיל

<u>הנחיות:</u>

ענו על שלוש שאלות. אם עניתם על יותר שאלות מהנדרש – נא ציינו אילו שאלות הן לבדיקה; בהעדר אמירה מפורשת תיבדקנה השאלות הראשונות **.נא לענות על כל שאלה בעמוד נפרד**. .נא להסביר ולנמק בבירור את כל התשובות. ערך כל שאלה הוא 32 נק'. תקבלו 4 נק' עבור נקיון.

בהצלחה!.

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
4	
נקיון	

שאלה 1

נתונה $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 25 \\ 0 & a & a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

א. לאילו ערכים של a המטריצה A לכסינה? (15 נק')

ב. עבור כל ערך של a מסעיף א', מצאו מטריצה הפיכה P_a ומטריצה אלכסונית D_a כך ש- $D_a = P_a^{-1} A P_a$ (10 נק')

ג. לשאר הערכים, הציגו את צורת ז'ורדן של A. (7 נק')

שאלה 2

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה אינסופי. יהי $T:V\to V$ אופרטור ליניארי כך שמתקיים $T^2 = T$.

א. הראו כי T ניתן לליכסון . (10 נק')

ב. הראו כי האופרטור $T+I$ הפיך ומצאו את הפולינום $f(x)$ מדרגה נמוכה ביותר כך ש- $f(T) = (T+I)^{-1}$ (10 נק')

ג. נניח בנוסף ש- V מרחב מכפלה פנימית. הראו כי $ker(T)$ הוא המשלים האורתוגונלי ל- $im(T)$ אם ורק אם האופרטור T צמוד לעצמו.

רמז. הראו כי כל וקטור ב- $ker(T)$ הוא בצורה $v-T(v)$. (12 נק')

<u>שאלה 3</u>

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל שדה מרוכבים. יהי B בסיס של V. תהי G מטריצת גרם של מכפלה פנימית יחסית ל-B. יהי T אופרטור לינארי ב-V. תהי A המטריצה המייצגת של T יחסית ל-B. יהי T^* האופרטור הצמוד ל- T .

א. מצאו את המטריצה המייצגת של T^* יחסית ל-B. (16 נק')

ב. יהי $E = \{e_1, e_2\}$ בסיס אורתונורמלי של V. יהי $B = \{e_1, e_2 + e_1\}$ בסיס אחר. תהי $A = [T]_B = \begin{pmatrix} i & 2i \\ -i & -i \end{pmatrix}$. האם האופרטור T צמוד לעצמו? (16 נק')

<u>שאלה 4</u>

שאלות "הוכח או הפרך". הניקוד על כל שאלה הוא 8 נקודות. נמקו היטב את תשובותיכם!

א. לאופרטור הפיך T ולאופרטור הפוך לו T^{-1} יש אותם וקטורים עצמיים.

ב. יהי $V = M(n,C)$ מרחב המטריצות המרוכבות הריבועיות מסדר n . תהי $A \in M(n,C)$ ונגדיר את האופרטור הלינארי $T: V \to V$ ע"י הנוסחא $T(X) = AX$. אזי הפולינום המינימלי של T זהה לפולינום המינימלי של A .

ג. יהי V מרחב מכפלה פנימית, U תת-מרחב, W המשלים האורתוגונלי ל- U . יהי T אופרטור לינארי ב-V.. יהי T^* האופרטור הצמוד ל- T . אם U אינווריאנטי יחסית ל- T , אזי W אינווריאנטי יחסית ל-T^*

ד. יהי V מרחב מכפלה פנימית, יהי T אופרטור צמוד לעצמו ב-V. אזי

$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle_{\boldsymbol{T}} = \langle \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w} \rangle$ גם מכפלה פנימית.