לינארית 2 - מטלה 5 -גרעין, תמונה ומטריצה מייצגת

הנחיות:
בראש הדף הראשון ציינו את הפרטים הבאים:

1. מספר תרגיל
2. שם מלא
3. ת.ז
4. מספר קבוצת תרגול שאליה אתם מגיעים.

תרגיל 1. יהיו V,U מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ ותהי $T:U\to V$ העתקה לינארית, הוכח ש-$\mathrm{Ker}\left(T\right)$ מהווה תת מרחב ווקטורי של U

פתרון. כזכור מלינארית 1 כדי להוכיח ש-$\mathrm{Ker}\left(T\right)$ הוא תת מרחב צריך להוכיח שלושה דברים

1. $0\in\mathrm{Ker}\left(T\right)$: כל העתקה לינארית מתקיימת $T\left(0\right)=0$ לכן $0\in\mathrm{Ker}\left(T\right)$
2. סגירות לחיבור: יהיו $v_{1},v_{2}\in\mathrm{Ker}\left(T\right)$ מכאן
$$T\left(v_{1}+v_{2}\right)=T\left(v_{1}\right)+T\left(v_{2}\right)=0+0=0$$
לכן $v_{1}+v_{2}\in\mathrm{Ker}\left(T\right)$
3. סגירות לכפל בסקלר: יהיו $\alpha\in\mathbb{F}$, $v\in\mathrm{Ker}\left(T\right)$ מכאן
$$T\left(\alpha v\right)=\alpha T\left(v\right)=\alpha0=0$$
לכן $\alpha v\in\mathrm{Ker}\left(T\right)$

הגרעין מקיים את שלושת התנאים ולכן הוא תת מרחב.

תרגיל 2. יהיו $T:V\to W$ העתקה לינארית ו-$\left\{ v_{1},v_{2},...,v_{n}\right\}$ הוא בסיס ל-V הוכח ש-
$$\mathrm{Im}\left(T\right)=\mathrm{Span}\left(T\left(v_{1}\right),T\left(v_{2}\right),\ldots,T\left(v_{n}\right)\right)$$

פתרון.
$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(T\right) & = & \left\{ w\in W|\exists v\in V:T\left(v\right)=w\right\} & = & \\
 & = & \left\{ T\left(v\right)|\exists v\in V\right\} & = & \\
 & = & \left\{ T\left(\alpha_{1}v_{1}+\alpha_{2}v_{2}+\ldots\alpha_{n}v_{n}\right)\right\} & = & \\
 & = & \left\{ \alpha_{1}T\left(v_{1}\right)+\alpha_{2}T\left(v_{2}\right)+\ldots+\alpha_{n}T\left(v_{n}\right)\right\} & = & \mathrm{Span}\left\{ T\left(v_{1}\right),T\left(v_{2}\right),\ldots,T\left(v_{n}\right)\right\} \end{aligned}$$

תרגיל 3. נתונה העתקה $T:\mathbb{R}_{3}\left[x\right]\to\mathbb{R}^{2\times2}$ המוגדרת על ידי
$$T\left(a+bx+cx^{2}+dx^{3}\right)=\left(\begin{array}{cc}
a+b & a+b\\
a+b+c & a+b+c
\end{array}\right)$$

1. הוכח ש-T העתקה לינארית.

פתרון. נוכיח את שני התנאים להעתקה לינארית

- שמירה על חיבור: יהיו

$$p(x)=a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3, q(x)=a_2+b_2x+c_2x^2+d_2x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$$

שני פולינומים אז

$$\begin{aligned}
T(p(x)+q(x)) &= T\left(a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3+a_2+b_2x+c_2x^2+d_2x^3\right) &= \\
&= T\left((a_1+a_2)+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)x^2+(d_1+d_2)x^3\right) &= \\
&= \begin{pmatrix} (a_1+a_2)+(b_1+b_2) & (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \\ (a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2) & (a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2) \end{pmatrix} &= \\
&= \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_1 \\ a_1+b_1+c_1 & a_1+b_1+c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2+b_2 & a_2+b_2 \\ a_2+b_2+c_2 & a_2+b_2+c_2 \end{pmatrix} &= \\
&= T\left(a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3\right)+T\left(a_2+b_2x+c_2x^2+d_2x^3\right) &= T(p(x))+T(q(x))
\end{aligned}$$

שמירה על כפל בסקלר: היו $\alpha \in \mathbb{R}, p(x)=a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3, \in \mathbb{R}_3[x]$ אז

$$\begin{aligned}
T(\alpha p(x)) &= T\left(\alpha\left(a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3\right)\right) &= \\
&= T\left((\alpha a_1)+(\alpha b_1)x+(\alpha c_1)x^2+(\alpha d_1)x^3\right) &= \\
&= \begin{pmatrix} \alpha a_1+\alpha b_1 & \alpha a_1+\alpha b_1 \\ \alpha a_1+\alpha b_1+\alpha c_1 & \alpha a_1+\alpha b_1+\alpha c_1 \end{pmatrix} &= \\
&= \alpha\begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_1 \\ a_1+b_1+c_1 & a_1+b_1+c_1 \end{pmatrix} &= \\
&= \alpha T\left(a_1+b_1x+c_1x^2+d_1x^3\right) &= \alpha T(p(x))
\end{aligned}$$

T מקיימת את שני התנאים ולכן היא העתקה לינארית.

2. מצאו בסיס ל-$\mathrm{Im}(T)$

פתרון. לפי שאלה 2 אם נקבל ש-

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\{T\} &= \mathrm{Span}\left\{T(1), T(x), T\left(x^2\right), T\left(x^3\right)\right\} = \\
&= \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

נוריד את האיברים התלויים ונקבל ש-$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס ל-$\mathrm{Im}\{T\}$

3. מצאו בסיס ל-$\mathrm{Ker}(T)$

פתרון. נפתח לפי ההגדרה של הגרעין

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}\{T\} &= \{p(x) \,|T(p(x))=0\} &&= \\
&= \left\{a+bx+cx^2+dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \middle| \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ a+b+c & a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} &&= \\
&= \left\{a+bx+cx^2+dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \middle| \left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& 0 \\ a+b+c &=& 0 \end{array}\right.\right\} &&= \\
&= \left\{a+bx+cx^2+dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \middle| \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -b \\ c &=& 0 \end{array}\right.\right\} &&= \\
&= \left\{-b+bx+dx^3 \in \mathbb{R}_3[x]\right\} &&= \operatorname{Span}\left\{x^3, x-1\right\}
\end{aligned}$$

זאת קבוצה בת"ל ופורשת לכן $\left\{x^3, x-1\right\}$ הוא בסיס ל-$\operatorname{Ker}\{T\}$

תרגיל 4. תהי $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ העתקה לינארית מוגדרת על ידי

$$T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a \\ c-2b \\ a+c \end{pmatrix}$$

ויהי

$$W = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל-$\mathbb{R}^3$ מצא את המטריצה $[T]_W^W$

פתרון. נחשב את עמודות המטריצה

$$\left\{\begin{array}{l}
T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}\right.$$

לכן

$$[T]_W^W = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \left[T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right]_W & \left[T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right]_W & \left[T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right]_W \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

תרגיל 5. יהי $T:\mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ העתקה לינארית המקיימת

$$\left\{\begin{array}{rcl}
T(2x+1) &=& 2x^2+1 \\
T(x+2) &=& x^2-3x+2 \\
T\left(x^2-x+2\right) &=& -5x+3
\end{array}\right.$$

ונתון ש-$W = \left\{x^2, x^2-2x, x^2-x+2\right\}$ בסיס ל-$\mathbb{R}_2[x]$ מצא את המטריצה $[T]_W^W$

פתרון. המטריצה היא

$$[T]_W^W = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(x^2)]_W & [T(x^2-2x)]_W & [T(x^2-x+2)]_W \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

כעת נחשב את עמודות המטריצה

- עמודה ראשונה

$$\begin{aligned} [T(x^2)]_W &= \left[T\left(\left(x^2-x+2\right)-\tfrac{5}{3}(x+2)+\tfrac{4}{3}(2x+1)\right)\right]_W = \\ &= \left[T\left(x^2-x+2\right)-\tfrac{5}{3}T(x+2)+\tfrac{4}{3}T(2x+1)\right]_W = \\ &= \left[-5x+3-\tfrac{5}{3}\left(x^2-3x+2\right)+\tfrac{4}{3}\left(2x^2+1\right)\right]_W = \\ &= \left[x^2+1\right]_W = \\ &= \left[\tfrac{3}{4}x^2-\tfrac{1}{4}\left(x^2-2x\right)+\tfrac{1}{2}\left(x^2-x+2\right)\right]_W = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- עמודה שנייה

$$\begin{aligned} [T(x^2-2x)]_W &= \left[T\left(\left(x^2-x+2\right)-1(x+2)\right)\right]_W = \\ &= \left[T\left(x^2-x+2\right)-T(x+2)\right]_W = \\ &= \left[-5x+3-\left(x^2-3x+2\right)\right]_W = \\ &= \left[-x^2-2x+1\right]_W = \\ &= \left[-\tfrac{9}{4}x^2+\tfrac{3}{4}\left(x^2-2x\right)+\tfrac{1}{2}\left(x^2-x+2\right)\right]_W = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- עמודה שלישית

$$\begin{aligned} [T(x^2-x+2)]_W &= [-5x+3]_W = \\ &= \left[-\tfrac{13}{4}x^2+\tfrac{7}{4}\left(x^2-2x\right)+\tfrac{3}{2}\left(x^2-x+2\right)\right]_W = \begin{pmatrix} -\frac{13}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

נשבץ את הווקטורים הללו כווקטורי עמודה במטריצה ונקבל

$$[T]_W^W = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(x^2)]_W & [T(x^2-2x)]_W & [T(x^2-x+2)]_W \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{13}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

בהצלחה!!