<u>88-112-ש.ב 10-11-פתרונות:</u>

<u>1.</u> כתוב את התמורות הבאות כהרכבת מחזורים זרים ומתוכם כהרכבת חילופים. קבע את זוגיותן.

א.אי זוגית $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1 \quad 4 \quad 2)(3 \quad 5) = (4 \quad 2)(2 \quad 1)(3 \quad 5) \Rightarrow$

ב.זוגית

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 6 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 4 \quad 6 \quad 3)(2 \quad 7) = (4 \quad 6)(6 \quad 3)(3 \quad 1)(2 \quad 7) \Rightarrow$$

<u>ע"מ 67:</u>

1.1 תרגיל. תהא X קבוצה סופית. ותהא $f{:}X \to X$ פונקציה כלשהי. הוכח: f חד־חד ערכית $\Leftrightarrow$ f על.

תהי f חח"ע. נניח f איננה על, אזי קיים $y \in \{1,2,...,n\} = X$ כך של-y לא קיים מקור $x \in X$.
כלומר, הטווח(שזהה לתחום) מכיל <u>ממש</u> את קבוצת תמונות הפונקציה ולכן גדול ממש ממנה.
ממתמטיקה בדידה ידוע לנו שפונ' לטווח סופי אשר תחומה גדול מטווחה איננה חח"ע, בסתירה להנחה.

תהי f פונ' על. נניח f איננה חח"ע, אזי קיימים שני מקורות הנישלחים לאותה תמונה, אזי, קב' התמונות של הפונ' קטן ממש מתחומה, שהוא גם טווחה. אזי הפונ' לא מכסה את כל הטווח, בסתירה להנחה.

1.11 תרגיל. מצא את הסימן של כל אחת מהתמורות המופיעות בתרגיל 1.3.

(כלומר של S_3)

$$sign(ID) = 1$$
$$sign((12)) = sign((13)) = sign((23)) = -1$$
$$sign((123)) = sign((132)) = 1$$

<u>2.</u> חשב את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות:

א. מטריצת סיבוב 3×3 כללית מעל Z_3^{3x3} $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, והוכח ששווה ל- $a+b+c$.

<u>פתרון:</u> נחשב

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - (abc + bca + cab) = a^3 + b^3 + c^3 - 3 \cdot abc$$

מעל Z_3^{3x3} נקבל $a^3 + b^3 + c^3$ ולפי משפט פרמה הקטן $a+b+c$.

ב. המטריצה $A-\lambda I$ כאשר $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 3 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ מעל R, והוכח שהיא מאפסת את הפולינום המתקבל, כאשר מציבים $\alpha I\in R^{3x3}$ במקום סקלר α.

<u>פתרון:</u> נפתח לפי השורה השלישית לקבל

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -4 & -3\\ 3 & -2-\lambda & 2\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}.$$

$$=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)(-2-\lambda)-(-4)\cdot 3\right]=(1-\lambda)\left(\lambda^2+\lambda+10\right)$$

כעת נציב את A בפולינום שהתקבל

$$A^2=\begin{pmatrix}-11 & 4 & -14\\ -3 & -8 & -11\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^2+A+10\cdot I=\begin{pmatrix}0 & 0 & -17\\ 0 & 0 & -9\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix}, I-A=\begin{pmatrix}0 & 4 & 3\\ -3 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (1-A)\left(A^2+A+10I\right)=0\in \square^{3\times 3}$$

מש"ל

<u>**:2.16**</u>

יהא n אי-זוגי, הוכח שאם $char(\mathrm{F})\neq 2$ דטרמיננטה של כל מטריצה $A\in \mathrm{F}^{n\times n}$ אנטי-סימטרית ($A=-A^T$) שווה ל- 0.

<u>הוכחה:</u>

בהרצאה ראינו כי $|A|=\left|A^T\right|$, ולפי הנתון $|-A|=\left|A^T\right|$. על כן $|A|=|-A|$. כזכור $\det(\alpha A)=\alpha^n\det(A)$, כלומר $|A|=|-A|=(-1)^n\cdot|A|$. נתון כי n אי-זוגי ולכן $|A|=-|A|$.

נעזר בנתון $char(\mathrm{F})\neq 2$ כדי להסיק $|A|=0$. *מש"ל*

<u>3.</u> נגדיר $A_3=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -1 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0 & -1\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & -1 & \lambda & 0\\ -1 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$, ובאופן דומה נגדיר

$A_n=\lambda I-\begin{pmatrix}0 & & -1\\ & \iddots & \\ -1 & & 0\end{pmatrix}$.

א. חשב את הדטרמיננטות של A_3, A_4.

<u>פתרון:</u>

$$\det\left(A_3\right)=\lambda\left(\lambda-1\right)\lambda-\left(-1\right)\left(\lambda-1\right)\left(-1\right)=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$$
$$\det\left(A_4\right)=\lambda^4+\left(-1\right)^4-\lambda\left(-1\right)^2\lambda-\left(-1\right)\lambda^2\left(-1\right)=\lambda^4-2\lambda^2+1$$

ב. חשב את הדטרמיננטה של A_{2n}.

<u>פתרון:</u>

$$\det\left(A_{2n}\right)=\lambda^{2n}+\left(-1\right)^{2n}-\lambda^{n-1}\left(-1\right)^2\lambda^{n-1}-\left(-1\right)^{n-1}\lambda^2\left(-1\right)^{n-1}=\lambda^{2n}-2\lambda^{2n-2}+1$$

ג. חשב את הדטרמיננטה של A_{2n-1}, והסק מהם ערכי λ שעבורם היא הפיכה.

<u>פתרון:</u>

$$\det\left(A_{2n-1}\right)=\lambda^{n-1}\left(\lambda-1\right)\lambda^{n-1}-\left(-1\right)^{n-1}\left(\lambda-1\right)\left(-1\right)^{n-1}=\lambda^{2n-1}-\lambda^{2n-2}-\lambda+1.$$

A_{2n-1} הפיכה אם ורק אם $\det\left(A_{2n-1}\right)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda^{2n-1}-\lambda^{2n-2}-\lambda+1\neq 0$.

נבדוק מתי הדטרמיננטה מתאפסת:

$$\lambda^{2n-1}-\lambda^{2n-2}-\lambda+1=\lambda^{2n-2}\left(\lambda-1\right)-\left(\lambda-1\right)=\left(\lambda^{2n-2}-1\right)\left(\lambda-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda=1\vee\lambda^{2n-2}=1\Leftrightarrow\lambda=\pm1$$

על A_{2n-1} הפיכה עבור $\lambda\neq\pm1$.

<u>**3.4:**</u>

3.4 תרגיל. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח בעזרת פיתוח לפי שורה/עמודה:

א. אם יש ב A שורת/עמודת אפסים, אזי $|A|=0$.

ב. אם A משולשית, אזי $|A|=a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$. (בפרט, $|I|=1$)

<u>פתרון:</u>

א. נפתח לפי שורת/עמודת האפסים

ב. בסיס: $\begin{vmatrix}a & b\\0 & c\end{vmatrix}=ac,\begin{vmatrix}d & 0\\e & f\end{vmatrix}=df$

נניח נכונות למטריצות משולשיות מגודל nxn ונוכיח למטריצות (n+1)x(n+1) ע"י פיתוח לפי השורה האחרונה במקרה של משולשית עליונה או הראשונה במקרה של משולשית תחתונה:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1,n} & a_{1,n+1}\\0 & \ddots & & \vdots\\\vdots & \ddots & a_{n,n} & a_{n,n+1}\\0 & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1}\end{vmatrix}=a_{n+1,n+1}\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,n}\\0 & & \\\vdots & \ddots & \vdots\\0\cdots & 0 & a_{n,n}\end{vmatrix}=a_{n+1,n+1}\left(a_{11}\cdots a_{nn}\right)$$

ובאותו אופן למשולשית תחתונה...

:4.4

4.4 תרגיל[!]. נתונים חמישה מספרים בני חמש ספרות, כולם מתחלקים ב 17 (תאמינו לי): 12342, 21029, 36601, 47277, 52292. נרכיב מטריצה $A\in\mathbb{R}^{5\times 5}$, שבכל רכיב שלה תופיע ספרה אחת:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 7 \\ 5 & 2 & 2 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

הוכח: $17|\det(A)$. [רמז: אין צורך לחשב את הדטרמיננטה!]

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 7 \\ 5 & 2 & 2 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 7 & 9 \\ 2 & 9 & 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{R_5+10,000R_1 \\ R_5+1000R_2 \\ R_5+100R_3 \\ R_5+10R_4}}{=}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 7 & 9 \\ 12342 & 21029 & 36601 & 47277 & 52292 \end{vmatrix} =$$

$$12342\begin{vmatrix} * & \dots & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \dots & \dots & * \end{vmatrix} - 21029\begin{vmatrix} * & \dots & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \dots & \dots & * \end{vmatrix} +$$

$$36601\begin{vmatrix} * & \dots & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \dots & \dots & * \end{vmatrix} - 47277\begin{vmatrix} * & \dots & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \dots & \dots & * \end{vmatrix} + 52292\begin{vmatrix} * & \dots & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \dots & \dots & * \end{vmatrix}$$

:5.4

5.4 תרגיל. יהיו $\tau,\sigma\in S_n$. הוכח:

א. $\det([T_\sigma])=\text{sign}(\sigma)$.

ב. $[T_{\tau\sigma}]=[T_\tau]\cdot[T_\sigma]$.

ג. הראה בעזרת (ב): $\text{sign}(\tau\sigma)=\text{sign}(\tau)\cdot\text{sign}(\sigma)$.

ב. הראה בעזרת (ג): $\text{sign}(\sigma^{-1})=\text{sign}(\sigma)$.

פתרון:

א. ראינו כי $\begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma 1} & \cdots & e_{\sigma n} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ T(e_1) & \cdots & T(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix} = \left[T_\sigma\right]$ מטריצה המורכבת מחילופי שורה בלבד ביחס למטריצת היחידה המותאמים לחילופים בפירוק של סיגמא, לכן מס' חילופי השורה במטריצה הוא כמספר חילופי הסדר ב σ ולכן $\left|T_\sigma\right| = (-1)^{n(\sigma)} I = sign(\sigma)$

ב. $\begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\tau\sigma 1} & \dots & e_{\tau\sigma n} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ T(e_1) & \dots & T(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix} = \left[T_{\tau\sigma}\right]$ מטריצה המורכבת מחילופי שורה בלבד ביחס למטריצת היחידה המותאמים לחילופים בפירוק של טאו הרכבה על סיגמא, ולכן מורכבת מחילופי שורה בלבד ביחס למטריצת היחידה המותאמים לחילופים בפירוק של סיגמא ואח"כ לחילופים בפירוק של טאו, לכן:

$$\left[T_{\tau\sigma}\right] = \begin{pmatrix} | & & | \\ T(e_1) & \dots & T(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\tau\sigma 1} & \dots & e_{\tau\sigma n} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\tau 1} & \dots & e_{\tau n} \\ | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & & | \\ e_{\sigma 1} & \dots & e_{\sigma n} \\ | & & | \end{pmatrix} = \left[T_\tau\right]\left[T_\sigma\right]$$

ג.

$$sign(\tau\sigma) = \left[T_{\tau\sigma}\right] = \left[T_\tau\right]\left[T_\sigma\right] = sign(\tau)\, sign(\sigma)$$

ד.

$$1 = sign(Id) = \left[T_{Id}\right] = \left[T_{\sigma^{-1}}\right]\left[T_\sigma\right] = sign\left(\sigma^{-1}\right) sign(\sigma)$$

$$\Downarrow$$

$$sign\left(\sigma^{-1}\right) = sign(\sigma) = 1 \vee sign\left(\sigma^{-1}\right) = sign(\sigma) = -1$$

<u>7.1:</u>

חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ \ddots & a & \ddots & \\ & 0 & \ddots & b \\ b & & \ddots & a \end{pmatrix} \in \mathrm{F}^{n\times n}$$

<u>הערה:</u> a באלכסון הראשי, b באלכסון מעליו, ו- b נוסף בפינה השמאלית.

פתרון:

$\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i,1}\left|A_{i,1}\right|=a\left|A_{1,1}\right|+(-1)^{n+1}b\left|A_{n,1}\right|$. נחשב דטרמיננטה של כל מינור

בנפרד:

$$\left|A_{1,1}\right|=\det\begin{pmatrix} a & b & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & b \\ & & & a \end{pmatrix}=a^{n-1},\left|A_{n,1}\right|=\det\begin{pmatrix} b & & & \\ a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a & b \end{pmatrix}=b^{n-1}.$$

לכן $\det(A)=a^{n}+(-1)^{n+1}b^{n}$.

4.

תהא $A\in \mathrm{F}^{n\times n}$, הוכיחו כי $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{kj}\left|A_{ij}\right|=0$ לכל $i\neq k$.

הוכחה:

יהי $1\le i\neq k\le n$ נגדיר את $B\in \mathrm{F}^{n\times n}$ כך ש- $b_{lj}=\begin{cases} a_{lj} : l\neq i \\ a_{kj} : l=i \end{cases}$, אזי

$R_k(B)=R_i(B)=R_k(A)$. כלומר שורותיה ל B תלויות לינארית זו בזו ולכן היא אינה הפיכה,

ובפרט $\det(B)=0$.

נפתח את דטרמיננטת B לפי השורה ה-i שלה:

$$\det(B)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}b_{ij}\left|B_{ij}\right|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{kj}\left|B_{ij}\right|.$$

לכל $1\le j\le n$ המינור B_{ij} הוא בדיוק A_{ij} כי $\forall 1\le l\neq i\le n: R_l(B)=R_l(A)$ ולכן

$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{kj}\left|A_{ij}\right|=\det(B)=0$ מש"ל.

8.2:

8.2 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ותהא $T:V\to V$ העתקה לינארית המקיימת $T^2=-I$. הוכח ש $\dim(V)$ זוגי. [רמז: התבונן ב $\det(T^2)$]

פתרון:

נגדיר $\dim(V)=n$, לכן:

$$(-1)^n\left|I\right|=\left|-I\right|=\left|T^2\right|=\left|T\right|^2\Rightarrow n \quad is \quad even$$

9.7:

תהא $A=\begin{pmatrix} z & \overline{z} & |z| \\ \overline{z} & z & |z| \\ \frac{1}{|z|} & \frac{1}{|z|} & 1 \end{pmatrix}\in \mathbb{C}^{3\times 3}$, $z\neq 0$.

א) מצא את $|A|$ ואת $adj(A)$.

ב) עבור אילו ערכי z המטריצה הפיכה.

ג) מצא את A^{-1}.

<u>הוכחה:</u>

א)
$$\left|A\right| = z^2+\bar{z}+\bar{z}-z-z-\bar{z}^2-z \underset{z=x+iy}{=} x^2+2ixy-y^2+2x-2iy-2x-2iy-x^2+2ixy+y^2$$
$$=4iy\left(x-1\right)$$

$$adj\left(A\right)=\begin{pmatrix} z-1 & 1-\bar{z} & \left|z\right|\left(\bar{z}-z\right) \\ 1-\bar{z} & z-1 & \left|z\right|\left(\bar{z}-z\right) \\ \frac{1}{\left|z\right|}\left(\bar{z}-z\right) & \frac{1}{\left|z\right|}\left(\bar{z}-z\right) & z^2-\bar{z}^2 \end{pmatrix}.$$

ב) A הפיכה $\Leftrightarrow \left|A\right|\neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(z\right)\neq 0 \wedge \operatorname{Re}\left(z\right)\neq 1$.

ג) נכתוב את $adj\left(A\right)$ בכתיב $z=x+iy$:

$$adj\left(A\right)=\begin{pmatrix} x-1+iy & 1-x+iy & \sqrt{x^2+y^2}\left(-2iy\right) \\ 1-x+iy & x-1+iy & \sqrt{x^2+y^2}\left(-2iy\right) \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-2iy\right) & \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-2iy\right) & 4ixy \end{pmatrix},$$

ונחלק ב- $\left|A\right|$

$$A^{-1}=\frac{1}{\left|A\right|}adj\left(A\right)=\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{iy}\right) & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{iy}\right) & \sqrt{x^2+y^2}\frac{1}{2\left(1-x\right)} \\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{iy}\right) & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{iy}\right) & \sqrt{x^2+y^2}\frac{1}{2\left(1-x\right)} \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2\left(1-x\right)} & \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{1}{2\left(1-x\right)} & \frac{x}{x-1} \end{pmatrix}$$

<u>9.9:</u>

הוכח שלכל מטריצה $A\in \mathrm{F}^{n\times n}$ משולשית עליונה גם $adj\left(A\right)$ משולשית עליונה.

<u>הוכחה:</u>

יהי $i>j$, ונסמן $B=adj\left(A\right)$, לכן צ"ל $b_{ij}=0$.

ובכן $b_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}\left|A_{ji}\right|$. המינור A_{ji} הוא מטריצה משולשית עליונה עם 0 על האלכסון, ולכן $\left|A_{ji}\right|=0 \Leftarrow b_{ij}=0$. *מש"ל*

<u>10.2:</u>

10.2 תרגיל. נתון ש- a,b,c,d שונים זה מזה, ונתונה המערכת: $\begin{cases} x+y+z+w &= 1 \\ ax+by+cz+dw &= \alpha \\ a^2x+b^2y+c^2z+d^2w &= \alpha^2 \\ a^3x+b^3y+c^3z+d^3w &= \alpha^3 \end{cases}$. מצא את x ואת z. [רמז: דטרמיננטה של ונדרמונדה]

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & b & c & d \\ \alpha^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ \alpha^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-c)(d-b)(d-\alpha)(c-b)(c-\alpha)(b-\alpha)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & \alpha & c & d \\ a^2 & \alpha^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & \alpha^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-c)(d-\alpha)(d-a)(c-\alpha)(c-a)(\alpha-a)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & \alpha & d \\ a^2 & b^2 & \alpha^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & \alpha^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-\alpha)(d-b)(d-a)(\alpha-b)(\alpha-a)(b-a)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & \alpha \\ a^2 & b^2 & c^2 & \alpha^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & \alpha^3 \end{vmatrix} = (\alpha-c)(\alpha-b)(\alpha-a)(c-b)(c-a)(b-a)$$

$$x = \frac{(d-c)(d-b)(d-\alpha)(c-b)(c-\alpha)(b-\alpha)}{(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)} = \frac{(d-\alpha)(c-\alpha)(b-\alpha)}{(d-a)(c-a)(b-a)}$$

$$y = \frac{(d-c)(d-\alpha)(d-a)(c-\alpha)(c-a)(\alpha-a)}{(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)} = \frac{(d-\alpha)(c-\alpha)(\alpha-a)}{(d-b)(c-b)(b-a)}$$

$$z = \frac{(d-\alpha)(d-b)(d-a)(\alpha-b)(\alpha-a)(b-a)}{(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)} = \frac{(d-\alpha)(\alpha-a)(\alpha-b)}{(d-c)(c-a)(c-b)}$$

$$w = \frac{(\alpha-c)(\alpha-b)(\alpha-a)(c-b)(c-a)(b-a)}{(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)} = \frac{(\alpha-c)(\alpha-b)(\alpha-a)}{(d-c)(d-b)(d-a)}$$