קורס טופולוגיה, אוניברסיטת בר-אילן, 2022

מרצה: מיכאל מגרל **megereli@math.biu.ac.il** אתר המרצה אתר הקורס wiki סילבוס

הרצאה 1

מילות מפתח: התכנסות, רציפות, קבוצות פתוחות, טופולוגיה ... Topology =Topos+Logos

Topology $\supset$ {Algebraic Topology, Topological Algebra, Differential Topology, …}

מרחב מטרי -- אחת מהדרכים לקבלת מרחבים טופולוגיים.

{Metric Spaces} → {Topological Spaces} (לא על, לא חח"ע)

מרחבים מטריים קישור מומלץ

הגדרה (Frechet 1906): **מטריקה** (**או מרחק**) על קבוצה $X \neq \emptyset$ היא פונקציה

$$d : X \times X \to [0,\infty) \quad (x,y) \mapsto d(x,y)$$

אקסיומות:

m_1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

m_2) $d(x,y) = d(y,x)$.

m_3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (אי שוויון המשולש).

(שקול: $d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \cdots + d(x_{n-1},x_n)$) **אינדוקציה !**

אומרים ש - (X,d) **מ"מ** (metric space).

דוגמאות:

1) $(\mathbb{R},d)$ שמוגדרת לפי $d(x,y) = |x-y|$

2) $X = \mathbb{R}^n$ $\quad x = (x_1,..,x_n)$, $y = (y_1,..,y_n)$

א. מטריקה אוקלידית $(\mathbb{R}^n,d)$ $\quad d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

ב. מטריקת הסכום Manhattan metric

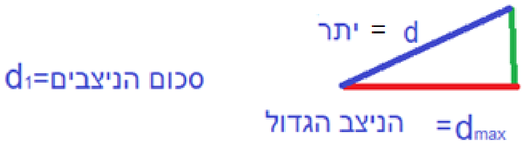
$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

ג. מטריקת המקסימום

$$d_{\max}(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : i \in \{1,\cdots,n\}\}$$

הערה: $d_{\max} \leq d \leq d_1 \leq n d_{\max}$.

מקרה של n=2



<u>הגדרה:</u> (**מרחב נורמי**) נניח E מרחב ווקטורי על שדה $\mathbb{R}$.

פונקציה $\|\cdot\|: E \to [0,\infty)$ נקראת **נורמה** אם מתקיים:

n_1) $\|\mathrm{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{v} = 0_E$

n_2) $\|c\mathrm{v}\| = |c| \cdot \|\mathrm{v}\|$ לכל $c \in \mathbb{R}, v \in E$

n_3) $\|\mathrm{u}+\mathrm{v}\| \le \|\mathrm{u}\| + \|\mathrm{v}\|$

אז $(E, \|\cdot\|)$ נקרא **מרחב נורמי** normed space

משפט: לכל מ"נ $(E,\|\cdot\|)$ הפונקציה $d_{\|\cdot\|}(u,v) := \|u-v\|$ $\quad d_{\|\cdot\|} : \mathrm{E}\times\mathrm{E} \to [0,\infty)$

היא מטריקה (שנקראת מטריקה של הנורמה) ותמיד מתקיים $\|\mathrm{v}\| = d_{\|\cdot\|}(0_E, \mathrm{v})$.

הוכחה:

m_1) $d(x,y) = \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0_E \Leftrightarrow x = y$

m_2) $\|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |(-1)| \cdot \|y-x\| = \|y-x\|$

m_3) $\|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \le \|x-y\| + \|y-z\|$

$\|\mathrm{v}\| = \|-v\| = \|0_E - \mathrm{v}\| = d_{\|\cdot\|}(0_E, \mathrm{v})$.

הערה: "ההתאמה" $(E,\|\cdot\|) \mapsto (\mathrm{E}, d_{\|\cdot\|})$ $\quad \{normed\ spaces\} \to \{metric\ spaces\}$

א. **לא על**

הסבר: למשל מרחב מטרי עם 2 נקודות או מרחב מטרי מעגל עם מטריקה אוקלידית "לא מתקבלת "בתמונה" של ההתאמה הנ"ל.

ב. **חד חד ערכית**

הסבר: נובע מהשוויון $\|\mathrm{v}\| = d_{\|\cdot\|}(0_E, \mathrm{v})$. מטריקת הנורמה משחזרת את הנורמה.

דוגמאות של מרחב נורמי:

- במרחב ווקטורי $\mathbb{R}^n$ בעל ממד n נגדיר:

א. נורמה אוקלידית $\| x \|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}$ (משרה מטריקה אוקלידית)

ב. נורמה של הסכום $\| x \|_1=\sum_{i=1}^{n}| x_i |$ (משרה מטריקת הסכום)

ג. נורמה של מקסימום $\| x \|_\infty=\| x \|_{\max}=\max\{| x_i |: i\in\{1,\cdots,n\}\}$

(משרה מטריקת מקסימום)

הערה: $\| x \|_{\max}\le\| x \|\le\| x \|_1\le n\| x \|_{\max}$

* בקבוצה $C[a,b]:=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\ \ continuous\ \ functions\}$ נגדיר:

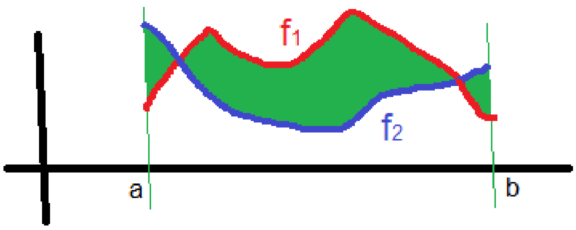
א. $\| f \|_{\max}=\max\{| f(x) |: x\in[a,b]\}$. מסמנים גם $\| f \|_\infty$.

משרה מטריקת מקסימום $d_{max}(f_1,f_2)=\max_{a\le x\le b}|f_1(x)-f_2(x)|$ (מדוע מתקבל *Max* ?)

"הסטייה" המקסימלית בין הפונקציות f_1,f_2 בקטע נתון.

ב. $\| f \|_1=\int_a^b|f(x)|\,dx$ משרה "מטריקת השטחים" $d_1(f_1,f_2)=\int_a^b| f_1(x)-f_2(x) |\,dx$

"השטח" בין הגרפים של הפונקציות f_1,f_2 בקטע $[a,b]$



<u>הגדרה:</u> (X,d) נקרא **מרחב פסאודו-מטרי** ($pseudometric$, נקרא $semimetric$ לפעמים) אם:

m_1^p) $d(x,y)=0 \Leftarrow x=y$ (החלשה של m_1).

m_2) $d(x,y)=d(y,x)$.

m_3) $d(x,y)+d(y,z)\ge d(x,z)$

<u>הגדרה:</u> (X,d) נקרא **מרחב אולטרה-מטרי** ultrametric אם:

m_1) $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.

m_2) $d(x,y)=d(y,x)$.

m_3^u) $\max\{d(x,y),d(y,z)\}\ge d(x,z)$ (חיזוק של m_3).

$\{pseudometric\}\supset\{metric\}\supset\{ultrametric\}$

הערה: לכל מטריקה d גם $c \cdot d$ מטריקה $\forall c > 0$ (נכון גם עבור פ"מ, אולטרה-מטריקה)

- לכל קבוצה X נגדיר $\forall x, y \in X: d_0(x,y) = 0$
  פסאודו מטריקת האפס.
- ב - $X = \mathbb{R}^2$, נגדיר $\rho_1(x,y) \coloneqq |x_1 - y_1|$

פסאודו-מטריקה (אבל לא מטריקה). למשל $\rho_1((3,5),(3,18)) = 0$.

ב - $X = \mathbb{R}^n$, נגדיר $\rho_k(x,y) \coloneqq |x_k - y_k|$ (הרכיב ה k)

- ב $X = C[0,5]$ $\|f\|_{1\le x\le 2} = \max\{|f(x)| : x \in [1,2]\}$ semi-norm (מדוע לא נורמה ?)
- נגדיר על קבוצה X "אולטרה-מטריקת 0-1":

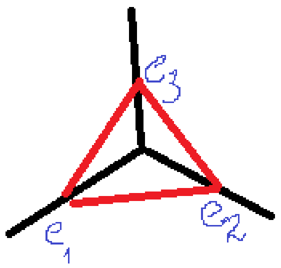
$$d_\Delta(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

טענה: על כל קבוצה X עם $|X| \geq 2$ יש (לפחות) $\aleph = 2^{\aleph_0}$ מטריקות שונות.

הסבר: $card\{rd_\Delta : r > 0\} = card(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$ העוצמה

תרגיל: $X = \left\{\frac{e_1}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{e_n}{\sqrt{2}}\right\} \subset \mathbb{R}^n$

עם מטריקה שמושרית מ d נותן דוגמה ספציפית של d_Δ.



הסבר: $d\left(\frac{e_i}{\sqrt{2}}, \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right) = \left\|\frac{e_i}{\sqrt{2}} - \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\|e_i - e_j\|}_{\sqrt{2}} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$

נשים לב: כאשר $i \neq j$ $\quad \|e_i - e_j\| = \sqrt{\dots + 1^2 + \dots + 1^2 + \dots} = \sqrt{2}$

- **דוגמה חשובה:** על שלמים $\mathbb{Z}$ נגדיר **מטריקה p-אדית** לכל מספר ראשוני $p \in \mathbb{P}$ נתון.

$$d_p(x,y) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{p^{k(x,y)}}, \; k(x,y) \coloneqq \max\{i : p^i | (x-y)\}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$ אולטרה-מטריקה

למשל: $x = 24, \; y = 6, \; p = 3$. $\quad d_3(24,6) = ?$

$$d_3(24,6) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

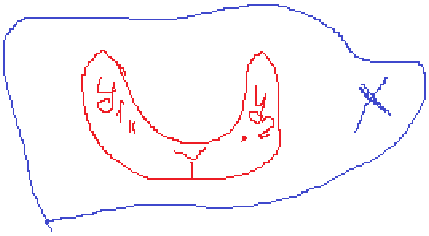
$$24 - 6 = 18 = 3^2 \cdot 2$$

$$d_3(0,5) = d_3(0,1) = 1$$

דוגמה חשובה: (קובית קנטור) ב $X=\{0,1\}^{\mathbb{N}}=\{(a_1,a_2,\cdots):\quad a_k\in\{0,1\}\}$

אולטרה-מטריקה $d(x,y):=\begin{cases}\frac{1}{2^{k(x,y)}}, k(x,y):=\min\{i:\ x_i\neq y_i\},\ x\neq y\\ 0,\ x=y\end{cases}$

הגדרה (תת מרחב מטרי): יהי (X,d) מ"מ, $\emptyset\neq Y\subseteq X$.



מטריקת הצמצום של Y מוגדרת:

$$d_Y(y_1,y_2)=d(y_1,y_2)$$

$$\forall y_1,y_2\in Y$$

מתקבל מ"מ (Y,d_Y) שנקרא **תת מרחב מטרי** של (X,d).

למשל: $\underbrace{Y=\left\{\frac{e_i}{\sqrt{2}},1\leq i\leq n\right\}}_{\text{ת"מ מטרי}}\subset\underbrace{(\mathbb{R}^n,d)}_{=X}$

מטריקת הצמצום על Y כאן שווה ל - d_Δ.

הערה: כל מ"מ הוא תת מרחב מטרי (עד כדי איזומטריה) של מרחב נורמי (נוכיח בהמשך).

הגדרה: נתון מ"מ (X,d), $\emptyset\neq A,B\subseteq X$.

$$\boldsymbol{d(A,B)}=\inf\{d(a,b)|a\in A,b\in B\}$$

$$0\leq d(A,B)<\infty$$

אזהרה: זאת לא מטריקה וגם לא פסאודו-מטריקה בקבוצה $P(X)$ של תת קבוצות.

הערה: לא תמיד inf ניתן להחליף ב - min.

$$A=\{x\in\mathbb{R}|x<0\},B=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$$

$$min\neq inf=d(A,B)=0$$

אישוויון חשוב: תמיד מתקיים $|d(x,A)-d(y,A)|\leq d(x,y)$ (ראו בתירגול)

הגדרה (הקוטר): $\boldsymbol{diam(A)}:=\sup\{d(x,y)|x,y\in A\}$

$$0\leq diam(A)\leq\infty$$

A נקראת **חסומה** אם $diam(A)<\infty$.

הערה: לא תמיד $sup=max$ $\quad A=(0,1)\quad max\ldots\neq sup\ldots=diam=1$

דוגמה: $diam(\mathbb{Z},d_p)=1$.

$$d_p(0,1)=1 \quad \forall k\in\{0,1,\cdots\} \quad \tfrac{1}{p^k}\le 1$$

הגדרות: יהי (X,d) , $a\in X$, $r>0$.

1) **כדור פתוח** עם מרכז ב – a ורדיוס r = $a\in B(a,r)=B_r(a):=\{x\in X|d(a,x)<r\}$

2) **כדור סגור** $a\in B[a,r]=B_r[a]:=\{x\in X|d(a,x)\le r\}$

3) **ספרה** *sphere* $a\notin S(a,r)=S_r(a):=\{x\in X|d(a,x)=r\}$

הערה: $a\in B(a,r)\subseteq B[a,r]$ $\qquad \underbrace{S(a,r)}_{a\notin}\subsetneq \underbrace{B[a,r]}_{a\in}$

דוגמה: לתאר $B(a,r),B[a,r],S[a,r]$ במרחב (X,d_Δ).

למשל: $S[a,r]=\begin{cases}\varnothing & 0<r\neq 1\\ X\setminus\{a\} & r=1\end{cases}$ .... (המשיכו !)

דוגמה: ב $(\mathbb{Z},d_3)$ $\qquad B[0,\tfrac{1}{3}]=3\mathbb{Z}$

הסבר: $B[0,\tfrac{1}{3}]=\{x\in\mathbb{Z}:\ d_3(x,0)\le\tfrac{1}{3}\}=\{x\in\mathbb{Z}:\ 3|x\}=3\mathbb{Z}$

תכונות: (לבדוק !)

א) $0<r_1\le r_2\Rightarrow B_{r_1}(a)\subseteq B_{r_2}(a)$.

ב) $diam(B_r(a))\le 2r$ (לא תמיד שווה. דוגמה ?).

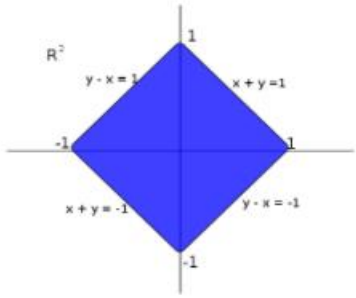
ג) $A\subseteq X$ חסומה $\Leftrightarrow \exists z\in X,\exists r>0: A\subseteq B_r(z)$.

ד) (כדור בתת מרחב) $B_{d_Y}(y,\epsilon)=B(y,\epsilon)\cap Y$

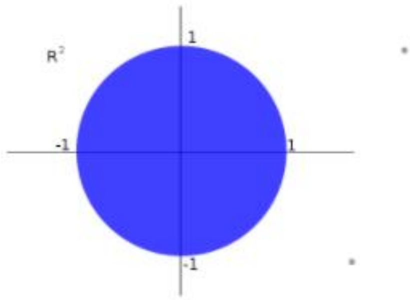
ה) $d\le\rho\Rightarrow B_\rho(a,r)\subseteq B_d(a,r)$

דוגמה: לתאר $B(a,r)$ במרחבים $(\mathbb{R}^2,d_{max}),(\mathbb{R}^2,d_1),(\mathbb{R}^2,d)$

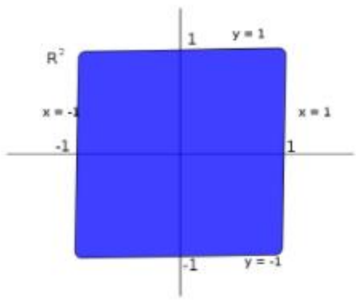
- The metric induced by $\|\cdot\|_1$ in that case, the unit ball is: $|x|+|y|<1$



- The metric induced by $\|\cdot\|_2$ in that case, the unit ball is: $\sqrt{x^2+y^2}<1$



- The metric induced by $\|\cdot\|_\infty$ in that case, the unit ball is: $\max\{|x|,|y|\}<1$



<u>הגדרה:</u> $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ (בין מרחבים – מטריים). אומרים ש – f

שיכון איזומטרי אם **שומרת מרחקים**, כלומר $\forall x_1,x_2\in X:\rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)=d(x_1,x_2)$

איזומטריה אם $\begin{cases} f(X)=Y \\ f\ \text{שומרת מרחקים} \end{cases}$

<u>טענה:</u> כל שיכון איזומטרי תמיד חח"ע.

<u>הוכחה:</u> אם $x_1\neq x_2$ נניח ש $f(x_1)=f(x_2)$

אז לכן $0=\rho\big(f(x_1),f(x_2)\big)=d(x_1,x_2)\underbrace{>}_{m_1}0$

בסתירה!

■

שימו לב: אם $f:X\to Y$ שיכון איזומטרי אם ורק אם $f:X\to f(X)$ איזומטריה.

הערה: איזומטריה ב $Metr$ בתפקיד של איזומורפיזמים. ז"א יש אותן תכונות מטריות.

- $[5,6] \simeq [1,2] \not\simeq [8,10]$

  הסבר: הזזה ל 4 יחידות בממשיים היא איזומטריה

  $T_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 4 + x$

  משרה איזומטריה $[1,2] \to [5,6]$

  ב $[8,10]$ קיימות נקודות x, y כך ש $d(x,y) = 2$ אבל לא ב $[1,2]$.

  (הסבר אחר: המרחבים עם קוטר שונה. אבל **קוטר נשמר ע"י איזומטריה**)

- שיכון איזומטרי לינאר $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ לכל $m \le n$ (**להשלים**)
- כל הזזה $T_a(v) = a + v$ $T_a : E \to E$ במרחב נורמי $a \in E$ היא איזומטריה.

  הסבר: $\| (a+v_1) - (a+v_2) \| = \| v_1 - v_2 \|$

- כל הזזה $T_a(x) = a + x$ $T_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ במרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ היא איזומטריה.

  (**להשלים**)

- $(\mathbb{Z}, d_5)$ לא איזומטרי עם $(\mathbb{Z}, d_3)$.

  הסבר: ב $(\mathbb{Z}, d_5)$ קיימות נקודות x, y כך ש $d_5(x,y) = \frac{1}{5}$ אבל לא ב $(\mathbb{Z}, d_3)$.

- קיים שיכון איזומטרי $\mathbb{R}^n \to l_2$.

  (**להשלים**) דומה למקרה של $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ לכל $m \le n$.

- קיים שיכון איזומטרי $(\mathbb{N}, d_\triangle) \to l_2$.

  הסבר מהיר: $n \mapsto \frac{e_n}{\sqrt{2}}$, $(\mathbb{N}, d_\triangle) \to \{\frac{e_n}{\sqrt{2}} : n \in \mathbb{N}\}$ איזומטריה.

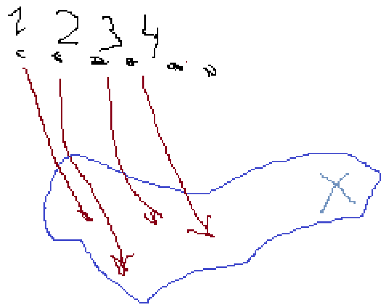
הערה: *מרחב הילברט סדרתי* $l_2 = \{x = (x_1, x_2, \cdots) : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$

$\| x \| := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$ $\qquad$ $< x, y > := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ מכפלה סקלרית (פנימית)

התכנסות סדרות

הגדרה (תזכורת): **סדרה** x_n בקבוצה X היא פונקציה $f : \{1, 2, \cdots\} = \mathbb{N} \to X, n \mapsto f(n) = x_n$.

תת סדרה x_{n_k} היא צמצום הפונקציה על תת קבוצה אינסופית $n_1 < n_2 < n_3 \cdots$



הגדרה: אומרים שסדרה x_n **מתכנסת** ל $a \in X$ במרחב (X,d)

ונסמן $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ (או $x_n \xrightarrow{d} a$) אם מתקיים:

הגדרה 1: $\lim_{n\to\infty} d(a,x_n) = 0$

הגדרה 2: כל ε-סביבה $B(a,\varepsilon)$ של a מכילה כמעט כל האיברים של הסדרה x_n

הגדרה 3: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(a,x_n) < \varepsilon$

דוגמה: ב $(\mathbb{Z}, d_3)$ $\lim_{n\to\infty} 3^n = 0$

הסבר: $d_3(3^n, 0) = \frac{1}{3^n} \to 0$.

הערה:

- סדרה קבועה לבסוף תמיד מתכנסת (ברור מה הגבול !) בכל מרחב (X,d).
- תת סדרה של סדרה מתכנסת גם מתכנסת (ברור מה הגבול !)
- נניח $\rho \leq d$. אז $x_n \xrightarrow{d} a \Leftarrow x_n \xrightarrow{\rho} a$.

הסבר: $0 \leq \rho(a,x_n) \leq d(a,x_n) \to 0$ בעזרת *תכונת סנדוויץ'* $\rho(a,x_n) \to 0$.

- התכנסות ב $\mathbb{R}^n$ היא התכנסות רכיב-רכיב.

הסבר: התכנסות גוררת "התכנסות רכיב-רכיב" כי $0 \leq \| v^{(m)} - u \|_k \leq \| v^{(m)} - u \| \xrightarrow{m\to\infty} 0$

($\| x \|_k$ "סמי-נורמה לפי קואורדינטה ה k " שהגדרנו)

גם ההפך נכון. תשתמשו בזה ש $\sum_{k=1}^{n} \| v \|_k =$ "נורמה של הסכום".

תרגיל: תנו דוגמה של סדרה לא מתכנסת ב l_2 שמתכנסת רכיב-רכיב.

הסבר: הסדרה הבאה מתכנסת רכיב רכיב לווקטור האפס

$e_1=(1,0,0,0\cdots)$

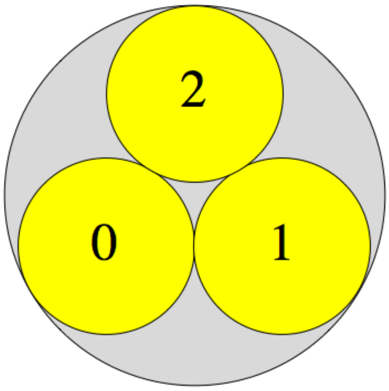
$e_2=(0,1,0,0\cdots)$

$e_3=(0,0,1,0\cdots)$

$\cdots$

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ לא מתכנסת כי $\forall i\neq j \quad d(e_i,e_j)=\sqrt{2}$

***תרגיל:** לפי האיור הבא תרכיבו ניסוח לתרגיל אפשרי לגבי מ"מ $(\mathbb{Z},d_3)$



ניסוח אפשרי: המרחב אפשר להציג כאיחוד של שלושה כדורים סגורים עם רדיוס $\frac{1}{3}$.

הסבר: $B_{\frac{1}{3}}[0]\cup B_{\frac{1}{3}}[1]\cup B_{\frac{1}{3}}[2]=3\mathbb{Z}\cup(3\mathbb{Z}+1)\cup(3\mathbb{Z}+2)=\mathbb{Z}$

הגדרה: נק' $a\in X$ נקראת **מבודדת** (isolated) אם $\exists\epsilon>0:\ B(a,\epsilon)=\{a\}$

דוגמאות: א. אין נקודה מבודדת ב $\mathbb{R}$ או ב $\mathbb{Q}$ ...

ב. נקודה 3 מבודדת בתת מרחב $X=[0,1]\cup\{3\}$ של $\mathbb{R}$.

הגדרה: מ"מ (X,d) נקרא **דיסקרטי** אם כל נקודה ב X מבודדת.

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, כל מרחב X עם מטריקת 0-1 הם דיסקרטיים.
- (Hamming distance)

בקבוצה $F(\mathbb{N})=\{(x_1,x_2,\cdots):\quad x_i\in\{0,1\}\ \ \exists\, k\in\mathbb{N}\ x_i=0\ \ \forall\, i>k\}$

$$d_H(x,y)=\sum_i|x_i-y_i|$$

$(F(\mathbb{N}),d_H)$ מרחב מטרי כך שהטופולוגיה שלו היא דיסקרטית.

המשמעות של $d_H(x,y)$ היא מספר ההבדלים בין המילים x,y.

מ"מ $(F(\mathbb{N}),d_H)$ משוכן לתוך מרחב נורמי $l_1=\{x=(x_1,x_2,\cdots):\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|<\infty\}$.

הרצאה 2

משפט: a נקודה מבודדת במרחב **מטרי** (X,d) אם ורק אם

$\lim x_n = a$ גורר שהסדרה x_n היא בהכרח קבועה לבסוף $x_1,\cdots,x_m,a,a,\cdots$.

בכיוון שני נוכיח יותר: **אם a לא מבודדת אז שקיימת סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל** a.

הוכחה: אם a מבודדת אז קיים $\varepsilon>0$ כך ש $B(\mathrm{a},\varepsilon)=\{\mathrm{a}\}$.

(כיוון ראשון) נניח ש $\lim x_n = a$.

עבור ε הנ"ל קיים $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ כך ש $x_n \in B(\mathrm{a},\varepsilon)=\{\mathrm{a}\}$. אז הסדרה היא לבסוף a.

(כיוון שני) נניח כעת שנקודה a לא מבודדת.

נוכיח: **שקיימת סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל** a.

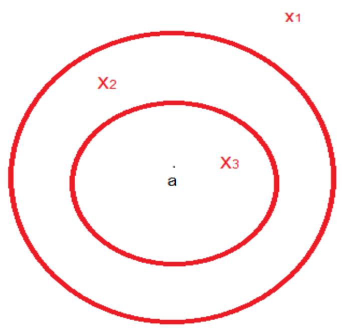
נבחר $x_1 \neq a$ (אם לא קיים אז המרחב הוא נקודון $X=\{a\}$ והנקודה מבודדת).

נעיר ש $0<d(a,x_1)$ כי (X,d) מרחב מטרי ומתקיימת m_1.

נבחר $0<\varepsilon_1<\min\{d(a,x_1),1\}$

בגלל ש a לא מבודדת קיים $x_2 \in B(a,\varepsilon_1), x_2 \neq a$.

נעיר ש $x_2 \neq x_1$ כי $d(a,x_2)<d(a,x_1)$.   וגם $d(a,x_2)<1$.



נמשיך בצורה רקורסיבית את הבנייה.

אם כבר הגדרנו $x_1,\cdots,x_n$ (שונים) $d(a,x_n)<d(a,x_{n-1})<\cdots<d(a,x_1)$

ולא שווים ל a עם התנאי $\forall 1<k\le n \;\; d(a,x_k)<\frac{1}{k-1}$

אז נבחר ε_n שמקיים $0<\varepsilon_n<\min\{d(a,x_n),\frac{1}{n}\}$

ונבחר x_{n+1} כך ש $x_{n+1}\ne a$, $d(a,x_{n+1})<\varepsilon_n$ (שוב, שימו לב ש a לא מבודדת)

אז $d(a,x_{n+1})<d(a,x_n)<d(a,x_{n-1})<\cdots<d(a,x_1)$.

כך נקבל סדרה עם איברים שונים ו $\lim x_n=a$ כי לכל $n>1$ $\;0\leftarrow d(a,x_n)<\frac{1}{n-1}$.

☺

<u>תרגיל:</u> הוכיחו שלא קיימת נקודה מבודדת ב $(\mathbb{Z},d_p)$.

הסבר: $\forall a\in\mathbb{Z} \quad a+p^n\xrightarrow{d_p}a$ סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל a .

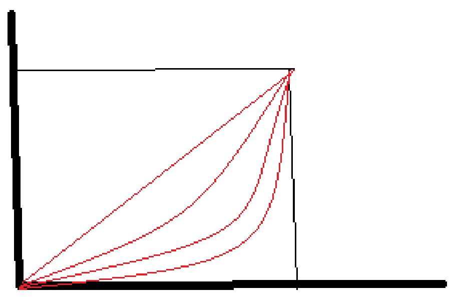
<u>דוגמה:</u> ב - $C[0,1]$ קיימת סדרה f_n כך ש

$$\begin{cases} f_n \overset{d_1}{\to} \theta \\ f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} \theta \end{cases}$$

$d_1(f_1,f_2)\coloneqq\int_0^1|f_1(x)-f_2(x)|dx \qquad d_{max}(f_1,f_2)\coloneqq\max\limits_{0\le x\le 1}|f_1(x)-f_2(x)|$.

הסבר:

נגדיר סדרה של פונקציות (סדרה ב - $C[0,1]$) $\qquad f_n(x)=x^n\,,x\in[0,1] \quad \theta(x)=0$



$$d_1(f_n,\theta)=\int_0^1|f_n(x)-0|dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$\lim_{n\to\infty}d_1(f_n,\theta)=0 \qquad f_n\overset{d_1}{\to}\theta$$

מצד שני

$$d_{max}(f_n,\theta) = \max_{0\le x\le 1}|f_n(x) - 0(x)| = \max_{0\le x\le 1} x^n = 1 \nrightarrow 0$$

$$\Rightarrow d_{max}(f_n,\theta) \nrightarrow 0$$

$$\Rightarrow f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} \theta$$

תרגיל: באופן דומה לכל $[a,b]$, $a<b$.

<u>הגדרות:</u>

א) נניח d,ρ מטריקות על <u>אותה קבוצה</u> X. אומרים ש – d **דומיננטי ביחס ל –** ρ אם:

$$\boxed{x_n \overset{d}{\to} a \Rightarrow x_n \overset{\rho}{\to} a}$$

לכל סדרה $x_n \in X$.

ב) אומרים ש - $d\sim\rho$ **("שקולות")** אם יש אותה התכנסות. ז"א

$$\boxed{x_n \overset{d}{\to} a \Leftrightarrow x_n \overset{\rho}{\to} a}$$

<u>תכונות פשוטות:</u>

1) $d\sim c\cdot d$, $c>0$ קבוע.

2) $\rho \le cd \Leftarrow d$ דומיננטי ביחס ל $\rho -$ (הסבר: דרך תכונת הסנדוויץ').

3) מטריקת 0-1 (או כל מטריקה עם טופולוגיה דיסקרטית) דומיננטית ביחס לכל מטריקה.

הסבר: כי לגבי מטריקת 0-1 נקבל מרחב דיסקרטי. כל נקודה מבודדת. במרחב כזה יש רק התכנסות קבועה לבסוף. מצד שני כל סדרה שהיא קבועה לבסוף מתכנסת לגבי כל מטריקה על אותה קבוצה.

דוגמה: d_{max} דומיננטי ביחס ל - d_1 בקבוצה $C[a,b]$.

<u>**הסבר:**</u> מ"ל – $d_1 \le c\cdot d_{max}$.

ש"ל – $\|\cdot\|_1 \le c\cdot\|\cdot\|_{max}$.

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b max|f(x)|dx \le \underbrace{(b-a)}_{c>0\text{ קבוע}}\cdot\underbrace{\max_{a\le x\le b}|f(x)|}_{=\|f\|_{max}}$$

הוכחנו $\|\cdot\|_1 \le (b-a)\cdot\|\cdot\|_{max}$.

<u>דוגמה:</u> $X := \mathbb{R}^n$. $\boxed{d_{max}\sim d\sim d_1}$

<u>**הסבר:**</u> $\boxed{d_{max}\le d\le d_1\le n\cdot d_{max}}$

<u>מסקנה:</u> שלושת המטריקות הנ"ל שונות אבל יש אותה התכנסות.

<u>בהמשך נוכיח</u> – הטופולוגיות שוות!

הגדרה חשובה: (טופולוגיה של (X,d))

נגדיר טופולוגיה של מ"פ (X,d) כאוסף של כל תת-קבוצות **פתוחות** ב X . נסמן:

$$\boldsymbol{top(d)} = top(X,d) \coloneqq \{\text{קבוצות פתוחות ב } (X,d)\}$$

כאשר **"קבוצה פתוחה"** מוגדרת כך:

אומרים ש - $O \subseteq X$ היא פתוחה אם (כל נקודה שלה **פנימית**) מתקיים:

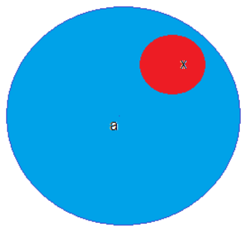
$$\boxed{x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq O}$$

<u>שימו לב:</u> תת קבוצה $A \subseteq X$ **לא פתוחה** ב (X,d) אם"ם <u>קיימת</u> נקודה $a \in A$ כך ש $B(a,\varepsilon)$ לא מוכל ב A לכל $\varepsilon > 0$.

הערה: מכאן ברור למשל $\emptyset \in top(d)$.

<u>משפט:</u> $\forall r > 0, \forall a \in X, \forall (X,d) : B_r(a) \in top(d)$.

(ז"א "כדור פתוח" קבוצה פתוחה).



<u>הוכחה:</u> <u>הרעיון:</u> $d(a,x) + r_x < r$.

מכאן ניקח כל מס' r_x כך: $0 < r_x < \underbrace{r - d(a,x)}_{\substack{\text{חיובי} \\ x \in B_r(a) \text{ כי}}}$

נוכיח $B_{r_x}(x) \subseteq B_r(a)$.

נניח $y \in B_{r_x}(x)$, צ"ל - $y \in B_r(a)$.

$$d(a,y) \underbrace{\leq}_{m_3} d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + r_x < r$$

$$\Rightarrow d(a,y) < r$$

ז"א $y \in B_r(a)$.

זה קורה עבור כל $x \in B_r(a)$ (ועבור r_x מתאים) ולכן $B_r(a)$ קבוצה פתוחה.

☺

__תוצאה:__ {כדורים פתוחים} בסיס לטופולוגיה $top(d)$

$$top(d) \ni O = \cup_{x \in O} B_{\epsilon_x}(x)$$

התנאים הבאים שקולים:

1) $\emptyset \neq O \in top(d)$.

2) $O =$ איחוד של "כדורים פתוחים".

__תרגיל:__ הוכיחו שלכל $(X, top(d))$ מתקיים:

t_1) $\emptyset, X \in top(d)$

t_2) $O_1, O_2 \in top(d) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in top(d)$ (חיתוך סופי של קבוצות פתוחות גם פתוח)

t_3) $\forall i \in I \quad O_i \in top(d) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in top(d)$ (איחוד של קבוצות פתוחות גם פתוח)

__הערה:__ $\{t_1, t_2, t_3\}$ "אקסיומות של טופולוגיה" על קבוצה X בצורה אבסטרקטית.

הערה: אחד מהמתמטיקאים שהשפיעו על טופולוגיה בצורה מאוד חזקה היה *Felix Hausdorff* . על החיים ומותו הטרגי בתקופת הנאצים בגרמניה ממליץ לקרוא

https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff

__משפט (תכונת Hausdorff):__

נניח (X, d) **מרחב מטרי**. אז לכל 2 נקודות __שונות__ יש סביבות זרות.

הוכחה: $a \neq b \overset{m_1}{\Rightarrow} d(a,b) > 0$

ניקח $0 < \epsilon \leq \frac{d(a,b)}{2}$.

אז $B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$. נבדוק !

אם נניח __שלא__: $\exists\, x \in B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b)$

$$\begin{cases} d(a,x) < \epsilon \\ d(b,x) \overset{m_2}{=} d(x,b) < \epsilon \end{cases}$$

נחבר: $d(a,b) \underbrace{\leq}_{m_3} d(a,x)+d(x,b) < 2\epsilon$

$\Rightarrow d(a,b) < 2\epsilon$

סתירה לבחירה ☺

<u>משפט (יחידות הגבול):</u> במרחב **מטרי** גבול סדרה הוא יחיד (אם קיים).

<u>הוכחה:</u> אם נניח בשלילה $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ $a \neq b$

לפי משפט (תכונת Hausdorff) יש סביבות זרות

$B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$

מצד שני, כמעט כל האיברים x_n נמצאים ב - $B_\epsilon(a)$ וגם ב - $B_\epsilon(b)$.

מכאן סתירה ⇐ מש"ל. ☺

דוגמה נגדית (במרחב פסאודו-מטרי אין יחידות הגבול)

במרחב פסאודו-מטרי $X=(\mathbb{R}^2,\rho_1)$ עם $\rho_1(x,y) := |x_1-y_1|$

ניקח את הסדרה $x_n = \left(1+\frac{2}{n},7\right) \to (1,y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$

אין יחידות של הגבול! (צריך לשים לב שזאת לא מטריקה).

תרגיל: הוכיחו שמרחב פסאו-דומטרי עם יחידות הגבול הוא תמיד מרחב מטרי.

<u>הערה:</u>

ב (X,d) מ"פ, $a \in X$, x_n סדרה. התנאים הבאים שקולים:

1) $\lim_{n\to\infty} d(x_n,a) = 0$ $(d(x_n,a) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0)$.

2) $\forall\epsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}, n > N: d(x_n,a) < \epsilon$.

3) בכל ϵ-סביבה של a (ז"א בכל $\mathrm{B}(a,\varepsilon)$) נמצאים כמעט כל האיברים של הסדרה.

4) בכל קבוצה פתוחה O שמכילה את a, כמעט כל האיברים נמצאים ב O.

<u>הגדרה:</u> ת"ק A במרחב (X,d) נקראת **סגורה** אם המשלים קבוצה פתוחה.

ז"א אם $A^c := X \setminus C \in top(d)$

<u>למשל:</u> $B_r[a]$ ("כדור סגור") הוא סגור.

לבדוק ! (יש הוכחה פשוטה גם דרך רציפות פונקציות !)

טענה: איחוד **סופי** של קבוצות סגורות סגור. חיתוך של קבוצות סגורות סגור.

רמז: ניתן להוכיח את זה ע"י התכונות של קבוצות פתוחות וחוקי דה-מורגן.

תרגיל: הוכיחו שכל נקודון סגור במרחב מטרי (ושזה לא נכון במרחב פסאודו-מטרי).

הסיקו: כל תת קבוצה סופית במרחב מטרי היא סגורה.

תרגיל: הוכיחו שכל קבוצה סגורה במרחב מטרי = חיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

סדרות קושי ומרחב מטרי שלם

הגדרה: (X,d) מ"מ. סדרה $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$ נקראת **סדרת קושי** $(Cauchy)$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$d(x_i, x_j) < \epsilon$$

$$i, j \geq n_\epsilon$$

הערה: אם x_n מתכנסת ב X אז x_n סדרת קושי (לבדוק!).

לכן אם סדרה לא ס"ק אז גם לא מתכנסת.

למשל:

$$e_1 = (1,0,0,0\cdots)$$
$$e_2 = (0,1,0,0\cdots)$$
$$e_3 = (0,0,1,0\cdots)$$
$$\cdots$$

$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ לא מתכנסת כי $\quad \forall i \neq j \quad d(e_i, e_j) = \sqrt{2}$

הגדרה: מ"מ (X,d) נקרא **שלם** $(Complete)$ אם לכל סדרת קושי x_n ב X יש גבול ב-X.

הגדרה: מ"נ $(E, \|\cdot\|)$ נקרא **מרחב בנך** $(Banach\ space)$ אם $(E, d_{\|\cdot\|})$ שלם.

דוגמאות:

- $(C[a,b], \|\cdot\|_{\max}), (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\max}), (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|), (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ מרחבי Banach
- $(C[a,b], \|\cdot\|_1), (C[a,b], \|\cdot\|_2)$ **לא** מרחבי Banach

הערה: $\langle f, g \rangle \coloneqq \int_a^b f(x)g(x)dx$

מכפלה פנימית ב - $C[a,b]$ שממנה מקבלים נורמה: $\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$

הנורמה מגדירה מטריקה d_2 על מרחב הפונקציות $C([a,b])$.

- נגדיר $l_\infty := \left\{x = (x_1, x_2, \dots) \middle| \|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty\right\}$ מרחב Banach

מרחבה Banach של סדרות **חסומות**.

הכללה: מרחב פונקציות חסומות על קבוצה S

$$l_\infty(S) := \{f: S \to \mathbb{R} | \text{חסום ב } \mathbb{R} \; f(S)\}$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in S} |f(x)|$$

2 מקרים פרטיים:

1) $S = \mathbb{N}$, אז נקבל את $l_\infty(\mathbb{N}) = l_\infty$.

2) $S = \{1,2,\dots,n\}$, אז נקבל את $(\mathbb{R}^n, d_{max})$.

דוגמה: $X = (\mathbb{Z}, d_p)$ מ"מ לא שלם !

נניח עבור $p = 3$: $x_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}$

סדרת קושי שלא מתכנסת ב X **(פרטים בתרגול).**

הערה:

שתי תכונות מאוד חשובות של שלמות:

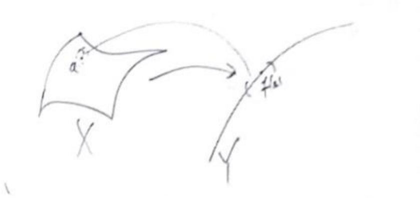
1) שלמות נשמרת בקבוצות סגורות (אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלמה לגבי מטריקת הצמצום).

2) נניח (Y, d_Y) תת מרחב מטרי של (X, d). אז אם (Y, d_Y) שלם אז Y סגורה ב – X.

רמז: תת קבוצה היא סגורה $\Leftrightarrow$ היא "סגורה בנוגע להתכנסות".

פונקציות רציפות

הגדרה (רציפות): נניח (X, d), (Y, ρ) מרחבים. פונקציה $f: X \to Y$ נקראת **רציפה בנקודה** $\boldsymbol{a \in X}$ אם:



$$\boxed{\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0: d(a,x) < \delta \Rightarrow \rho\big(f(a), f(x)\big) < \epsilon}$$

f נקראת **רציפה**, כאשר f רציפה בכל נקודה $a \in X$.

נסמן: $f \in C(X,Y)$. אם $Y = \mathbb{R}$ אז נסמן: $f \in C(X)$.

הגדרה: אומרים ש – f **רציפה במידה שווה (במ"ש)** *uniformly continuous*

אם בבחירה של δ אין תלות ב a. ז"א

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta: d(x_1,x_2) < \delta \Rightarrow \rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) < \epsilon$$

$$\boxed{f \in UC(X,Y)}$$

הגדרה: אומרים ש f מקיימת **תנאי ליפשיץ** $(Lipschitz)$ לגבי המקדם $0 < c$ אם:

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in X: \rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) \le c \cdot d(x_1,x_2)}$$

נסמן $\boxed{f \in Lip_c(X,Y)}$ $\boxed{Lip(X,Y) = \cup_{c>0} Lip_c(X,Y)}$

תמיד: $\boxed{Lip(X,Y) \subset UC(X,Y) \subset C(X,Y)}$

דוגמאות מאנליזה:

רציפה אבל לא במ"ש $f(x) = x^2\ , f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

רציפה במ"ש אבל לא ליפשיץ $f(x) = \sqrt{x}\ , f: [0,1] \to \mathbb{R}$

הערה: כל שיכון איזומטרי פונקצית ליפשיץ עם מקדם 1 (**אבל לא ההפך ! תנו דוגמה**).

סימון: אם קיימת איזומטריה, נסמנה $(X,d) \simeq (Y,\rho)$

זהו "יחס שקילות" **באוסף** Metr (מרחבים מטריים).

1) $(X,d) \simeq (X,d)$ (פ' הזהות).

2) $(X,d) \simeq (Y,\rho) \Leftarrow (Y,\rho) \simeq (X,d)$ (פ' הופכית).

3) $\begin{cases}(X_1,d_1) \simeq (X_2,d_2) \\ (X_2,d_2) \simeq (X_3,d_3)\end{cases} \Rightarrow (X_1,d_1) \simeq (X_3,d_3)$ (ההרכבה)

דוגמאות:

1) **הזזה** במרחב נורמי $T_v(x) = v + x$ $T_v: E \to E$ תמיד איזומטריה (הוכחנו).

תבדקו ש $T_v(B(0_E, r)) = B(v, r)$. לכן $B(v,r) \simeq B(u,r) \quad \forall u, v \in E$.

2) ($\|\cdot\|$ $\in Lip_1(E,\mathbb{R})$ $f: E \xrightarrow{\|\cdot\|} [0,\infty)$, כאשר E מרחב נורמי.

הסבר: $\big| \|u\| - \|v\| \big| \underbrace{\le}_{c=1} \|u - v\|$

3) $f_A: X \to \mathbb{R} \in Lip_1(X,\mathbb{R})$ המוגדרת ע"י: $f_A(x) = d(x, A)$

הסבר: שימוש באי שוויון חשוב $|d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y)$

משפט (עיקרון $Heine$): נניח $(X,d), (Y,\rho)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f: X \to Y$ התנאים הבאים שקולים:

1) f רציפה.

2) f שומרת על התכנסות (כלומר, $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$).

3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (ז"א $\forall O \in top(\rho): f^{-1}(O) \in top(d)$)

לפני ההוכחה קודם נדון כמה תוצאות.

משפט (השוואת טופולוגיות): נניח ש - d, ρ מטריקות על אותה קבוצה X. אז התנאים הבאים שקולים:

1) $top(\rho) \subseteq top(d)$.

2) d דומיננטי ביחס ל ρ. ז"א $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow x_n \xrightarrow{\rho} a$

הוכחה: נגדיר את "פונקציית הזהות" $x \mapsto x$ $(X,d) \xrightarrow{id} (X,\rho)$

נשתמש במשפט (עיקרון היינה).

כש - $f = id$, אז $f^{-1}(O) = O$. לכן תנאי 3 מעיקרון היינה יהיה –

$$\forall O \in top(\rho): O \in top(d)$$

$$\Rightarrow top(\rho) \subseteq top(d)$$

תנאי 2 בעיקרון היינה נותן לנו ישירות את התנאי השני במשפט שלנו.

■

תוצאה: התנאים הבאים שקולים:

1) $top(d) = top(\rho)$.

2) $\rho \sim d$.

הסבר: נובע מיד ! שני כיוונים במשפט הקודם.

דוגמה:

1) $X = \mathbb{R}^n$ $\qquad$ $top(d_{max}) = top(d) = top(d_1)$

כי $\quad d_{max} \sim d \sim d_1$

2) $X = C[a,b]$ $(a < b)$ $\qquad$ $top(d_1) \subsetneq top(d_{max})$

- (מוכל) כי d_{max} דומיננטי ביחס ל - d_1: $\quad d_1 \leq (b-a)d_{max}$

לכן לפי משפט ההשוואה נקבל שיש הכלה של הטופולוגיות.

- (לא שווה) כעת, יש **הכלה ממש** כי קיימת סדרה f_n ב - $C[a,b]$ $(a < b)$ וגם סדרה f ב - $C[a,b]$ כך ש $\quad f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} f$, $f_n \overset{d_1}{\rightarrow} f$

ראינו דוגמה בהרצאה ב - $[0,1]$.

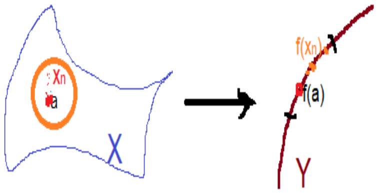
הרצאה 3

<u>משפט (עיקרון $Heine$):</u> נניח $(Y,\rho),(X,d)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f\colon X\to Y$ התנאים הבאים שקולים:

1) f רציפה.

2) f <u>שומרת על התכנסות</u> (כלומר, $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$).

3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (ז"א $\forall O\in top(\rho)\colon f^{-1}(O)\in top(d)$)



<u>הוכחה:</u>

<u>$(1)\Leftarrow(2)$:</u>

נתון ש $x_n \xrightarrow{d} a$. צ"ל - $f(x_n)\xrightarrow{\rho} f(a)$.

f רציפה $\Leftarrow$ f רציפה בנקודה $a\in X$.

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\colon f\big(B_\delta(a)\big)\subseteq B_\epsilon\big(f(a)\big)$ (הגדרת $Cauchy$).

לפי הגדרת התכנסות, כמעט כל האיברים של x_n נמצאים בכדור $B_\delta(a)$:

$\exists n_0\in\mathbb{N}\colon \forall n\geq n_0\colon x_n\in B_\delta(a)$

אז כמעט כל האיברים של הסדרה $f(x_n)$ נמצאים ב ϵ -סביבה: $B_\epsilon\big(f(a)\big)$

לכן הוכחנו: $f(x_n)\xrightarrow{\rho} f(a)$.

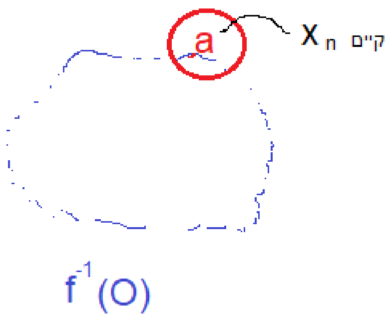
<u>$(2)\Leftarrow(3)$:</u>

נניח בשלילה ש (3) לא מתקיים. ז"א:

$\exists O\in top(\rho)\colon f^{-1}(O)\notin top(d)$

כלומר O פתוחה בעוד ש $f^{-1}(O)$ לא פתוחה ב (X,d).

ז"א קיימת נקודה "<u>לא פנימית</u>" $\exists a\in f^{-1}(O)\colon \forall\epsilon>0\ \ B_\epsilon(a)\not\subseteq f^{-1}(O)$



עבור כל $\epsilon \coloneqq \frac{1}{n}$ קיים $x_n \in X$ כך ש

$$\begin{cases} x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \\ x_n \notin f^{-1}(O) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(a, x_n) < \frac{1}{n} \\ f(x_n) \notin O \end{cases}$$

מהשורה הראשונה נובע ש $d(a, x_n) < \frac{1}{n}$ ולכן - $x_n \xrightarrow{d} a$.

על מנת לקבל סתירה, מספיק להוכיח $f(x_n) \overset{\rho}{\nrightarrow} f(a)$.

$f(a) \in O \in top(\rho)$ וכן O פתוחה ולכן $f(a)$ נקודה פנימית ב O.

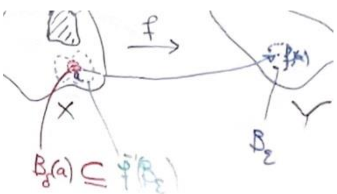
אז קיים $\epsilon > 0$ כך ש $B_\epsilon(f(a)) \subseteq O$

אבל מהשורה השנייה מקודם $f(x_n) \notin O$ ולכן $\forall n: f(x_n) \notin B_\epsilon(f(a))$.

לכן $f(x_n) \overset{\rho}{\nrightarrow} f(a)$.

<u>$(3) \Leftarrow (1)$:</u>

בודקים את (1) -- רציפות "דרך כדורים".



לכל $\epsilon > 0$ נתון – $O = B_\epsilon(f(a)) \in top(\rho)$ (למדנו שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה).

לכן בגלל (3) $f^{-1}(O) = f^{-1}\left(B_\epsilon(f(a))\right) \in top(d)$ גם פתוח.

אכן $a \in f^{-1}(O)$, ולכן a נקודה פנימית, אז קיים $\delta > 0$ כך ש –

$$B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(O)$$

$$\Rightarrow f(B_\delta(a)) \subseteq f(f^{-1}(O)) \subseteq O = B_\epsilon(f(a))$$

הערה: במשפט עקרון $Heine$ (3 תנאים) אפשר להוסיף תנאי רביעי על קבוצות סגורות.

4) מקור של קבוצה סגורה הוא גם סגור.

<u>הסבר מקוצר:</u> $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$

A סגורה אם ורק אם A^c פתוחה.

ולכן $(4) \Leftrightarrow (3)$.

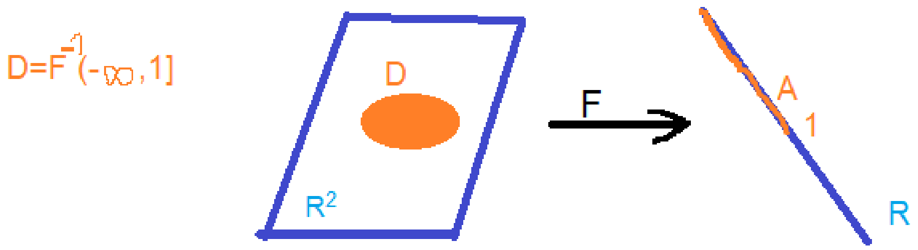
☺

<u>דוגמאות:</u>

1) $D \coloneqq \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$ סגור ב - $\mathbb{R}^2$.

<u>הסבר:</u> $F(x,y) \coloneqq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

רציפה (פונקציה פולינומיאלית!).



2) כל מישור ב - $\mathbb{R}^3$ סגור. למשל

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \underbrace{2x + 3y - 4z + 5}_{F(x,y,z)} = 0\right\}$$

סגור, כי את D ניתן לכתוב כ $D = F^{-1}(0)$ ואכן $\{0\}$ סגור ב - $\mathbb{R}$.

3) בכל מ"מ (X,d): $B_r[a]$ $S_r(a)$ סגורות.

<u>הסבר:</u>

נגדיר פו' $f_a: X \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = d(a,x)$. זוהי פונקציית ליפשיץ – $f_a \in Lip_1 \subset C(X)$.

$$f_a^{-1}(-\infty, r] = B_r[a] \coloneqq \{x \in X | d(a,x) \leq r\}$$

גם סגור!

4) $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ מטריצות הפיכות, <u>פתוחה</u> במרחב של מטריצות ריבועיות.

$$Gl_n(\mathbb{R}) \subset Mat_n(\mathbb{R}) \overset{metr}{\simeq} \mathbb{R}^{n^2}$$

הגדרות: (X,d) מ"מ, $A \subseteq X$.

א) **"הסגור של A"** $(Closure\ of\ A)$:

$$A \underbrace{\subseteq}_{m_1} \bar{A} = cl(A) := \{x \in X \mid \ d(x,A) = 0\}$$

ב) **"סגור סדרתי"** $(sequential\ closure)$:

$$A \underbrace{\subseteq}_{\substack{\text{סדרה קבועה} \\ \text{תמיד מתכנסת!}}} scl(A) := \left\{x \in X \middle| \exists a_n \in A : x = \lim_{n\to\infty} a_n\right\}$$

הערה: נניח $A \subset \mathbb{R}, \sup A < \infty$. אזי $\sup A \in cl(A)$. דומה לגבי $\inf A$.

משפט 1: בכל <u>מ"מ</u> תמיד $\boxed{scl(A) = cl(A)}$.

הוכחה: $(\subseteq)$: נניח $z \in scl(A)$ אז

$$\begin{cases} \exists a_n \in A \\ z = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \end{cases}$$

$$d(z,a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow d(z,\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = 0$$

$$0 \le d(z,A) \le d(z,\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \Rightarrow d(z,A) = 0$$

$$\Rightarrow z \in cl(A)$$

$(\supseteq)$:

$$z \in cl(A)$$

$$\Rightarrow \inf_{a\in A} d(z,a) = d(z,A) = 0$$

(לפי הגדרת inf) נקבל שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$ כך ש

$$\forall n \in \mathbb{N}: 0 \le d(z,a_n) \le \frac{1}{\underbrace{n}_{\to 0}}$$

מכאן $a_n \in A \land \lim\limits_{n\to\infty} a_n = z \in scl(A)$

☺

משפט 2 (קריטריון סגירות במ"מ): נניח (X,d) מ"מ, $A \subseteq X$. התנאים הבאים שקולים:

1) A סגורה ב X (ז"א משלים לפתוחה).

2) $A = scl(A)$ (A סגורה לגבי הגבולות).

3) $A = cl(A)$.

4) A "קבוצת אפסים" של פונ' רציפה (ז"א קיימת פ' רציפה $X \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ כך ש - $A = f^{-1}(0)$).

<u>הוכחה:</u>

<u>$(1) \Leftarrow (2)$:</u>

נניח בשלילה ש - $A \neq scl(A)$.

אז (בגלל ש - $A \subseteq scl(A)$) קיימת נק' –

$$\begin{cases} z \in scl(A) \\ z \notin A \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \lim a_n \ , \exists a_n \in A \\ z \notin A \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \lim a_n \ , \exists a_n \in A \\ z \in A^c \end{cases}$$

A סגורה (נתון). ז"א A^c <u>פתוחה</u>!

ואז z נקודה פנימית של A^c.

$$\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(z) \subseteq A^c$$

אז אף איבר של הסדרה a_n לא נמצה בכדור $B_r(z)$ וזאת סתירה ל –

$$\begin{cases} z = \lim a_n \\ a_n \in A \end{cases}$$

$(2) \Leftarrow (3)$: בגלל משפט 1.

<u>$(3) \Leftarrow (4)$:</u>

נגדיר $f_A : X \to \mathbb{R}$ (רציפה!) $f_A(x) = d(x, A)$

$$f_A^{-1}(0) = \{x \in X | f_A(x) = 0\} = \{x \in X | d(x, A) = 0\} = cl(A) \underbrace{=}_{\text{נתון } 3} A$$

ולכן $f_A^{-1}(0) = A$.

<u>$(4) \Leftarrow (1)$:</u>נפעיל "תוספת למשפט $Heine$" (מקור לסגור גם סגור) $f^{-1}(0)$ מקור של נקודון.

☺

<u>הגדרה:</u> במ"מ (X, d) עבור $A \subseteq X$, נגדיר

$$A' := \{x \in X | x \in cl(A \backslash \{x\})\} \overset{metr}{=} \{x \in X | x \in scl(A \backslash \{x\})\} \subset cl(A)$$

נקודות ההצטברות של A.

<u>תרגיל:</u> הוכיחו ש $z \in A'$ אם ורק אם קיימת סדרה ב A **עם איברים שונים** שמתכנסת ב X לנקודה z.

<u>רמז:</u> ראו בהרצאה 1 משפט (על נקודה מבודדת) הוכחה של כיוון שני. תשתמשו בעובדה ש

$d(z, A\backslash\{z\}) = 0$ על מנת לבנות סדרה מבוקשת (במקום העובדה בטענה ש z לא מבודדת).

<u>דוגמאות:</u>

1) $A = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$.

$$A' = \{0\}$$

$$A'' = \emptyset$$

2) $A = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \middle| n, m \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}^2$.

$$A' = \left\{(0,0), \left(\frac{1}{n}, 0\right), \left(0, \frac{1}{m}\right)\right\}$$

$$A'' = \{(0,0)\}$$

$$A''' = \emptyset$$

3) $A=[0,1] \subset \mathbb{R}$

אז

$$A' = A$$

<u>תכונות (במ"מ):</u> (בתירגול או לבדוק לבד!).

א) $cl(A) = A \cup A'$.

ב) A סגורה $\Leftrightarrow A' \subseteq A$

<u>הגדרה:</u> אומרים שתת קבוצה A ב- X היא:

א) **"קבוצה G_δ"** אם A שווה לחיתוך **בן מנייה** של קבוצות פתוחות.

(ז"א $\exists O_n \in top(d), n \in \mathbb{N}: A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$).

ב) **"קבוצה F_σ"** אם A שווה לאיחוד **בן מנייה** של קבוצות סגורות.

(ז"א $\exists P_n \subseteq X: A = \bigcup_{n\in N} P_n$, P_n סגורה $\forall n$).

<u>הערה:</u> $A \in G_\delta \Leftrightarrow A^c \in F_\sigma$

למשל: כל נקודון **קבוצה G_δ** וגם F_σ **(מדוע ?)** בכל מ"מ

<u>תרגיל:</u>

"בעזרת פונקציה רציפה" הוכיחו שבמרחב מטרי (X, d):

א) כל קבוצה סגורה היא G_δ.

ב) כל קבוצה פתוחה היא F_σ

הגדרה: A נקראת קבוצה **סגוחה** (clopen) אם $\begin{cases} A \text{ פתוחה} \\ A \text{ סגורה} \end{cases}$

דוגמאות:

1) $A=(0,1)$ פתוחה ולא סגורה ב $X=\mathbb{R}$.

2) $A=[0,1]$ סגורה ולא פתוחה ב $X=\mathbb{R}$.

3) $A=[0,1)$ לא סגורה ולא פתוחה ב $X=\mathbb{R}$.

4) $\emptyset,\mathbb{R}$ סגוחות ב - $\mathbb{R}$.

הערה: לכל מרחב (X,d) – תת קבוצות $\emptyset,X$ תמיד סגוחות (כי $X=\emptyset^c$, $\emptyset=X^c$).

השאלה: מתי יש סגוחות נוספות לא טריוויליות ?

הגדרה: מרחב (X,d) נקרא **קשיר** (*connected*) אם קבוצות סגוחות במרחב הן **רק** $\emptyset,X$.

הגדרה שקולה להיות **לא קשיר**: אם קיים פירוק $X=X_1\uplus X_2$ כך ש –

$\begin{cases} X_1\neq\emptyset, X_2\neq\emptyset \\ X_1,X_2\in top(d) \text{ (פתוחות)} \\ X_1\cap X_2=\emptyset \end{cases}$ (שימו לב ש X_1,X_2 <u>סגוחות</u> לא טריוויאליות)

למשל: אם: $\underbrace{X}_{\text{כתת מרחב}}=[2,4)\cup(5,\infty)\subset\mathbb{R}$

אז X **לא קשיר**. שימו לב ש $(5,\infty)$ **סגוחה** ב X (לא ב $\mathbb{R}$).

דומה עבור $[2,4)$ (למשל 2 נק' פנימית ב $[2,4)$ כי $B_{\frac{1}{2}}(2)=[2,2.5)\subseteq[2,4)$).

עוד דוגמה: מרחב מטרי של רציונליים $\mathbb{Q}$ (כתת מרחב בממשיים) לא קשיר.

יש אינסוף ת"ק סגוחות ובהתאם יש אינסוף "פירוקים טופולוגיים". למשל:

$$\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$$

$$X_1=(-\infty,\sqrt{2})\cap\mathbb{Q}$$

$$X_2=\mathbb{Q}\cap(\sqrt{2},\infty)$$

תרגיל: הוכיחו שמרחב $(\mathbb{Z},d_p)$ (עם מטריקה p –אדית) כל כדור פתוח קבוצה סגוחה.

הסיקו ש $(\mathbb{Z},d_p)$ לא קשיר.

משפט: (*תכונות בסיסיות של מרחב מטרי שלם*)

1. שלמות נשמרת בקבוצות סגורות

(אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלם כתת מ"מ).

2. נניח (Y,d_Y) תת מרחב מטרי של (X,d). אז אם (Y,d_Y) שלם אז Y <u>סגורה</u> ב X.

הוכחה: בתירגול

השלמה של מרחב מטרי

<u>הגדרה</u>: **השלמה** של מ"מ (X,d) הוא

שיכון איזומטרי $M \overset{i}{\hookrightarrow} (X,d)$, כאשר M **מ"מ שלם** ומתקיים: $cl(i(X)) = M$.

<u>הערה:</u>

קל לבדוק שהסגור $cl(A)$ של A בכל מרחב הוא תמיד קבוצה סגורה.

(וזה נכון אפילו למרחבים טופולוגיים, נוכיח בהמשך)

משפט (שיכון למרחב $\boldsymbol{Banach}$): לכל מ"מ (X,d) קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב Banach.

<u>הוכחה:</u> למדנו על מרחב $\left(l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup}\right) \in Banach$.

$$l_\infty(X) = \left\{ f: X \to \mathbb{R} \middle| \text{חסומה } f(X) \right\}$$

$$\|f\|_{sup} \coloneqq \sup_{x\in X} |f(x)|$$

נראה כי ניתן לשכן את X לתוך $l_\infty(X)$:

נבחר $z \in X$. ונגדיר – $\varphi: X \to l_\infty(X)$

$$\boxed{\hat{a}(x) = d(a,x) - d(z,x)} \qquad \hat{a}: X \to \mathbb{R} \qquad a \longmapsto \varphi(a) = \hat{a}$$

$\hat{a} \in l_\infty(X)$, ז"א $\hat{a}$ פונקציה חסומה כי

$$|\hat{a}(x)| = |d(a,x) - d(z,x)| \le \underbrace{d(a,z)}_{\text{קבוע}}$$

מ"ל $\forall a,b \in X: \boxed{d(a,b) = \left\|\hat{a} - \hat{b}\right\|}$.

$$\left\|\hat{a} - \hat{b}\right\| = \sup_{x\in X} \left| \left(d(a,x) - d(z,x)\right) - \left(d(b,x) - d(z,x)\right) \right| =$$

$$= \sup_{x\in X} |d(a,x) - d(b,x)| \le d(a,b)$$

מצד שני, אם נציב $x = b$ נקבל

$$\left\|\hat{a} - \hat{b}\right\| = \sup_{x\in X} |d(a,x) - d(b,x)| \ge \quad |d(a,b) - 0| = d(a,b)$$

☺

הרצאה 4

משפט (השלמה): לכל מ"מ (X,d) יש השלמה.

הסבר ב 2 דרכים:

<u>דרך I:</u> הוכחנו שלכל (X,d) קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב $Banach$

$$\varphi: X \to l_\infty(X)$$

$l_\infty(X)$ פונקציות חסומות וממשיות. ($\left(l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup}\right)$ מרחב $Banach$).

$$\overline{\varphi(X)} \subset l_\infty(X)$$

קבוצה סגורה במרחב שלם ולכן גם שלם.

אז קיבלנו השלמה $\quad X \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \overline{\varphi(X)} = cl(\varphi(X))$

☺

<u>דרך II:</u> "דרך סדרות קושי" (הוכחה מקוצרת - רק שלבים בסיסיים). הוכחה מפורטת אפשר למצוא למשל בספר "טופולוגיה קבוצתית",ד. ליבוביץ (האוניברסיטה הפתוחה) חלק א.

הרעיון מאוד דומה להשלמה $\mathbb{Q} \overset{i}{\hookrightarrow} \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ של מרחב רציונליים. כשאנחנו מגדירים מספר ממשי כמחלקת שקילות של סדרות קושי ברציונליים.

<u>שלב א':</u> עבור מ"מ נתון (X,d) נגדיר קבוצה – $\tilde{X} := \{$סדרות קושי ב $(X,d)\}$

נגדיר פסאודו-מטריקה באופן טבעי: לכל זוג של ס"ק $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{X}$

נגדיר $\quad \tilde{d}(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$

הגבול קיים כי מדובר על סדרות קושי וקל לבדוק ש $d(x_n,y_n)$ ס"ק ב $\mathbb{R}$

(רמז: שימו לב $|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| \le d(x_n,x_m) + d(y_m,y_n)$).

לכן הסדרה $d(x_n,y_n)$ באמת מתכנסת ב $\mathbb{R}$ כי $\mathbb{R}$ שלם.

$(\tilde{X},\tilde{d})$ מרחב פסאודו-מטרי.

<u>שלב ב':</u>

<u>טענת עזר</u>: *(מרחב מטרי מושרה ע"י מרחב פסאודו-מטרי)*

נניח $(\tilde{X},\tilde{d})$ מרחב פסאודו-מטרי (כללי).

יוצרים ממנו מרחב מטרי מנה שמקבלים באופן הבא.

על מרחב פסאודו-מטרי $(\tilde{X},\tilde{d})$ מגדירים יחס שקילות ("מרחק אפס"):

$$x\Omega y \overset{def}{=} \tilde{d}(x,y)=0$$

נקבל קבוצת מנה: $M:=\tilde{X}/\Omega=\{[x]\ \text{מחלקות שקילות}\}$

$$[x]:=\{y\in\tilde{X}\,|\,\tilde{d}(x,y)=0\}$$

נגדיר ב M מרחק טבעי (דרך הנציגים): $\bar{d}([x],[y])=\tilde{d}(x,y)$.

אין תלות בנציגים וזאת באמת מטריקה. אז: $(M,\bar{d})$ מרחב מטרי,

הפונקציה $(\tilde{X},\tilde{d})\to(M,\bar{d}),\ x\mapsto[x]$ היא על ושומרת מרחקים.

נחזור למשפט. נפעיל "טענת עזר" על מרחב פסאודו-מטרי שלנו $(\tilde{X},\tilde{d})$ של ס"ק.

נגדיר שיכון: $x\longmapsto[\tilde{x}] \qquad X\overset{i}{\hookrightarrow}M$

כאשר $\tilde{x}\in\tilde{X}$ סדרה קבועה $x,x,x\ ...$. אז מתקיימים תנאים הבאים:

i שיכון איזומטרי.

$$d(x,y)=\bar{d}([\tilde{x}],[\tilde{y}])$$

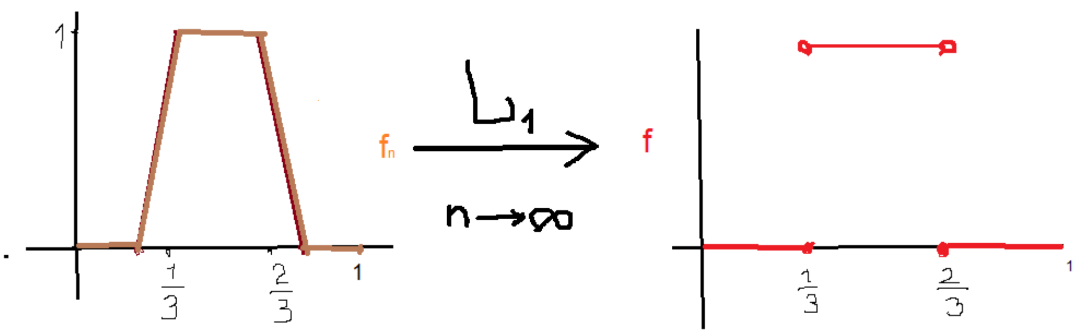
$$\overline{\iota(X)}=M$$

(M,ρ) מרחב שלם. ☺

<u>דוגמה 1</u>: $\mathbb{Q}^n\hookrightarrow\mathbb{R}^n=\overline{\mathbb{Q}^n}$.

<u>דוגמה 2</u>: $(C[a,b],d_1)\underset{\text{השלמה}}{\hookrightarrow}L_1[a,b]$, כאשר $L_1[a,b]$ פונקציות אינטגרביליות.

$(C[a,b],d_1)$ לא שלם!



(f_n) ס"ק ב - $(C[a,b],d_1)$ אבל לא מתכנסת ב - $(C[a,b],d_1)$.

כן מתכנס במרחב (גדול יותר) $L_1[a,b]$:

כאשר: $E=\left\{f \,\middle|\, \int_a^b |f|dx=0\right\}$.

$\widetilde{L_1}$ מרחב פסאודו-נורמי ! (אומרים יותר: סמי-נורמי). $L_1[a,b]=\widetilde{L_1}\,/E$ מרחב המנה והוא מרחב בנך של פונקציות אינטגרביליות על $[a,b]$.

3) $L_2[a,b] \underset{\text{השלמה}}{\hookleftarrow} (C[a,b],d_2)$. מקבלים מרחב הילברט פונקציונלי.

<u>**תזכורת:**</u> $X=(\mathbb{Z},d_p)$ מ"מ לא שלם! (היה בתירגול)

למשל עבור $p=3$: $x_n=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}$

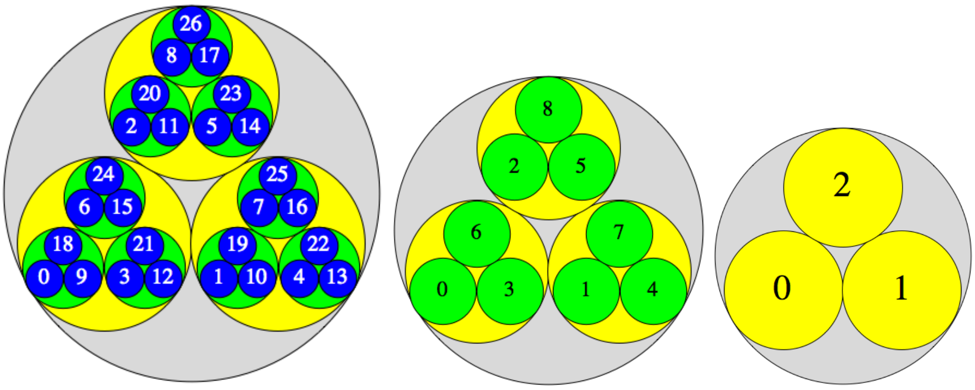
סדרת קושי שלא מתכנסת ב X.

דוגמה 4: $(\overline{\mathbb{Z}},\overline{d_p}) \hookleftarrow (\mathbb{Z},d_p)$ כאשר: השלמה היא

$$\overline{\mathbb{Z}}=\{\text{שלמים } p-\text{אדיים}\}=\left\{\sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k \,,\, b_k\in \underbrace{\{0,1,\dots,p-1\}}_{\text{שאריות מודולו } p}=\mathbb{Z}_p\right\}$$

שהוא קומפקטי (ולכן גם שלם) ! בעצם זאת חבורה טופולוגית קומפקטית.

<u>**שאלה**</u>: כיצד אפשר לדמיין את האיברים של ההשלמה $(\mathbb{Z},\overline{d_3})$ לפי התמונות הבאות ?



....

מרחבים טופולוגיים

הגדרה: תהי X קבוצה לא ריקה. אוסף תת הקבוצות $\tau \subseteq P(X) \coloneqq \{A|A \subseteq X\}$ נקרא **טופולוגיה על קבוצה X** אם מתקיימים התנאים הבאים:

t_1) $\emptyset, X \in \tau$.

t_2) (חיתוכים סופיים) $O_i \in \tau$ עבור $i \in \{1,2,\ldots,n\} \Leftarrow O_1 \cap O_2 \cap \ldots \cap O_n \in \tau$

(מספיק עבור $n=2$).

t_3) (איחודים) $O_i \in \tau$ עבור $i \in I \Leftarrow \bigcup_{i\in I} O_i \in \tau$.

אם מתקיימים הנ"ל, אז נאמר ש - (X,τ) הוא **מרחב טופולוגי** $(Topological\ space)$ ונרשום בקיצור מ"ט.

הגדרות נוספות:

א) אומרים ש - $A \subseteq X$ היא תת קבוצה **פתוחה** (במ"ט (X,τ)) אם

$$\boxed{A \text{ פתוחה} \overset{def}{=} A \in \tau}$$

ב) תת קבוצה $A \subseteq X$ נקראת קב' **סגורה** (במ"ט (X,τ)) אם המשלים קבוצה פתוחה, ז"א

$$\boxed{A \text{ סגורה} \overset{def}{=} A^c \text{ פתוחה}}$$

דוגמאות:

1) לכל מרחב פסאודו-מטרי (X,d): $\big(X, top(d)\big)$ מרחב טופולוגי (לבדוק!).

כאשר $top(d) = \{d \text{ קבוצות פתוחות במובן}\}$.

הגדרה: אומרים שמ"ט (X,τ) הוא **מטריזבילי** אם קיימת מטריקה d כך ש $\boxed{\tau = top(d)}$

באופן דומה אפשר להגדיר: מרחב טופולוגי **פסאודו-מטריזבילי**

משפט (תכונות בסיסיות של קבוצות סגורות): לכל מ"ט (X,τ) מתקיים:

t_1^c) $X, \emptyset$ סגורות.

t_2^c) איחוד סופי של קבוצות סגורות הוא סגור.

t_3^c) כל חיתוך קב' סגורות שוב סגור.

הוכחה: כללי $de\ Morgan \wedge$ הגדרת TOP.

<u>הגדרה</u>: קבוצה סגוחה = סגורה+פתוחה.

2) "טופולוגיה טריוויאלית": $\tau_{tr} \coloneqq \{\emptyset, X\}$. (X, τ_{tr}) **מרחב טריוויאלי**.

<u>הערה</u>: מ"ט (X, τ_{tr}) תמיד פסאודו-מטריזבילי: כי $\tau_{tr} = top(d_0)$. כאשר $d_0(x,y) = 0$.

3) "**טופולוגיה דיסקרטית**": $\tau_{discr} \coloneqq P(X) = \{X \text{ תת קבוצות ב} -\}$

(כאן כל תת קבוצה היא פתוחה, בעצם סגוחה)

<u>שימו לב</u>: בין היתר, כל נקודון $\{x\}$ קבוצה פתוחה (שקול לדיסקרטיות בגלל t_3).

<u>הגדרה</u>: נקודה a במרחב טופולוגי (X, τ) נקראת **מבודדת** $(isolated)$ אם $\{a\} \in \tau$

(נקודון פתוח!).

<u>לכן</u>: מרחב טופולוגי הוא דיסקרטי $\Leftrightarrow$ כל נקודה מבודדת בו.

<u>הערה</u>: מרחב דיסקרטי הוא תמיד מטריזבילי. $\tau_{discr} = top(d_\Delta)$ (d_Δ מטריקת 0-1).

<u>הערה</u>: לכל טופולוגיה τ מתקיים: $\{\emptyset, X\} = \tau_{tr} \subseteq \tau \subseteq \tau_{discr} = P(X)$

<u>הגדרה</u>: נניח $\tau_1 \subseteq \tau_2$ 2 טופולוגיות על אותה קבוצה X. אז אומרים ש - τ_2 **חזקה** יותר מ - τ_1, ואומרים ש - τ_1 **חלשה** יותר מ - τ_2.

4) $X = \{0,1\}$ ונגדיר – $\tau_* \coloneqq \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ טופולוגית Sierpinski

$\{0\}$ מבודדת, $\{1\}$ <u>לא</u>. מה הן קבוצות סגורות ? סגוחות ?

<u>הגדרה (תת מרחב טופולוגי)</u>: יהי $(X, \tau) \ni TOP$, $\emptyset \neq Y \subseteq X$.

מגדירים **טופולוגית תת מרחב** מעל Y: $\tau_Y \coloneqq \{\, O \cap Y | O \in \tau\}$

תבדקו ש $(Y, \tau_Y) \ni TOP$

<u>הערה</u>: $\{metric\ spaces\} = Metr \to TOP = \{topological\ spaces\}, (\mathrm{X}, \mathrm{d}) \mapsto (\mathrm{X}, \mathrm{top(d)})$

א) לא על.

ב) לא חח"ע.

<u>הסבר ב'</u>: (שקילות טופולוגית של מטריקות)

<u>הסבר א'</u>: שקול להגיד: שלא כל מ"ט הוא מטריזבילי.

דוגמה:

- (X,τ_{tr}) מ"ט טריוויאלי עם X לא נקודון--- לא מטריזבילי (אבל פסאודו-מטריזבילי).
- $X \coloneqq \{0,1\}$. (X,τ_*) מ"ט אבל לא מטריזבילי (אפילו לא פסאודו-מטריזבילי!).

$$\tau_* = \left\{\underbrace{\emptyset,\{0\},\{0,1\}}_{\text{פתוחות}}\right\} \qquad \left\{\underbrace{\{0,1\},\{1\},\emptyset}_{\text{סגורות}}\right\}$$

הסבר:

הסבר קצר שהמרחב לא מטריזבילי: $(\{0,1\},\tau_*) \notin Metriz$

נקודון $\{0\}$ לא קבוצה סגורה! מצד שני, בכל מ"מ, כל נקודון סגור!

נוכיח יותר: ש - $(\{0,1\},\tau_*)$ לא פסאודו-מטריזבילי. נניח בשלילה שכן ...

נניח בשלילה שיש פסאודו-מטריקה ρ על $\{0,1\}$ כך ש – $top(\rho) = \tau_*$.

2 מקרים:

1) $\rho(0,1) = 0$ ואז $\rho = d_0$. מצד שני, $\tau_* \neq top(d_0) = \{\emptyset,\{0,1\}\}$.

2) $\rho(0,1) > 0$. כאן – $\tau_* \subsetneq top(\rho) = \{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$

כי כל הנק' מבודדות ולכן המרחב הוא דיסקרטי.

5) "טופולוגיה קו-סופית":

לכל קב' $X \neq \emptyset$ נגדיר – $\tau_{cof} \coloneqq \{F^c : \text{סופית } F \subseteq X\} \cup \{\emptyset\}$

שאלה: מה הן קבוצות סגורות ? סגוחות ?

לבדוק: (X,τ_{cof}) מ"ט אבל לא תמיד מטריזבילי (תלוי בעוצמה של X).

$$(\mathbb{R},\tau_{cof}) = \{F^c \subseteq \mathbb{R} \mid \text{סופית } F \subset \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \notin Metriz$$

רמז: לנקודות שונות אין "סביבות" פתוחות זרות.

הגדרות:

יהי (X,τ) מ"ט.

1) תת קבוצה $V \subseteq X$ נקראת **סביבה לנק' $a \in X$** אם קיימת קבוצה פתוחה O ($\in \tau$)

כך ש $a \in O \subseteq V$.

נסמן $V \in N(a)$, כאשר $N(a)$ סביבות של a.

אומרים **סביבה פתוחה** אם V פתוחה.

אזהרה: סביבה לא חייבת להיות פתוחה.

2) באופן דומה נגדיר **סביבה V לתת קבוצה $S \subseteq X$** אם

$$\exists O \in \tau: \ \ S \subseteq O \subseteq V$$

נסמן $V \in N(S)$, כאשר $N(aS)$ סביבות של A.

3) אומרים שנקודה a היא **נק' פנימית** של קבוצה $A \subseteq X$ אם $A \in N(a)$.

הסימון: $a \in int(A)$ או $a \in A^{\circ}$.

בעצם זה מגדיר את ה"פנים" של A: $int(A)$ (כאוסף של נקודות פנימיות).

<u>הערה:</u> תמיד $int(A) \subseteq A$.

<u>טענה:</u> $int(A) = A \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{קריטריון לפתיחות}} A$ פתוחה $(A \in \tau)$.

הסבר: שימוש ב t_3 $\quad A=\bigcup_{a\in A} O_a \in \tau$ ...

הערה חשובה: הרבה הגדרות במ"ט מתקבלות מהגדרות על מ"מ כשמחליפים ε-סביבות בסביבות. למשל: התכנסות סדרות, רציפות פונקציות, ...

<u>הגדרה:</u> **התכנסות סדרות**

$$\mathbb{N} \xrightarrow{f} X \quad n \longmapsto f(n) = x_n$$

לסדרה x_n במ"ט (X,τ) מגדירים גבול (אם קיים!) באופן הבא:

אומרים ש - $a \in X$ **גבול** של סדרה $x_n \in X$ אם לכל סביבה (פתוחה) U של a

כמעט כל האיברים נמצאים בסביבה U. ז"א

$$\forall U \in N(a) \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in U \qquad (n_0 \text{ תלוי בסביבה } U)$$

<u>סימון:</u> $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ או $x_n \xrightarrow{\tau} a$.

<u>הגדרה:</u> **רציפות פונקציות**

נייח $(X,\tau),(Y,\sigma)$ מ"ט. פונקציה $f: X \to Y$ נקראת *רציפה בנקודה* $a \in X$ אם:

$$\forall U \in N(f(a)) \quad \exists V \in N(a) \quad f(V) \subseteq U$$

אומרים *רציפה* אם היא רציפה בכל נקודה $a \in X$. סימון: $f \in C(X,Y)$.

<u>הערה:</u> (כמו במ"מ) פונקציה $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ בין 2 מ"ט **רציפה** אם"ם

$$\boxed{\forall O \in \sigma : f^{-1}(O) \in \tau}$$

ז"א מקור לפתוח הוא פתוח (ניתן לנסח עבור סגור).

תרגיל: הוכיחו ש $f : X \to Y$ רציפה בכל נקודה $a \in X$ אם"ם $f^{-1}(O) \in \tau \quad \forall O \in \sigma$.

__הגדרה:__ X מקיימת **תכונת Hausdorff** (סימון נוסף: תכונת T_2), כלומר: $X \in T_2$

אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות $\underbrace{(\text{פתוחות})}_{\text{בה"כ}}$ זרות.

__משפט:__ (יחידות הגבול במרחב טופולוגי (X,τ) עם תכונה T_2 $(Hausdorff)$, גבול של סדרה תמיד יחיד, אם קיים.

__הוכחה:__ נניח בשלילה ש $\begin{cases} a \neq b \\ X \in T_2 \end{cases}$

$\Leftarrow$ קיימות __סביבות זרות__ $U \in N(a), V \in N(b)$ כך ש - $U \cap V = \emptyset$.

U מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה x_n, __וגם__ V מכיל כמעט כל האיברים של הסדרה ...

סתירה! ☺

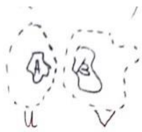
__אקסיומות הפרדה נוספות:__

__הגדרות:__ נניח $A \subseteq X$, $B \subseteq X$. אומרים:

א) קיימת **הפרדה סביבתית** של A, B (במ"ט (X,τ)) אם

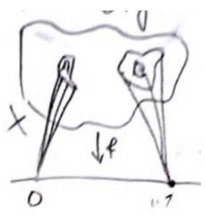
$$\exists\, U \in N(A), V \in N(B): U \cap V = \emptyset$$

(ז"א אם קיימות סביבות $\underbrace{(\text{פתוחות})}_{\text{בה"כ}}$ זרות).



ב) קיימת **הפרדה פונקציונלית** במובן $Urysohn$ אם:

$$\exists f \in C(X,[0,1]): f(A) = 0, f(B) = 1$$



__טענה:__ מהפרדה פונקציונלית נובעת מהפרדה סביבתית.

__הוכחה:__ ניקח סביבות פתוחות זרות של 0,1 ב - $[0,1]$.

$$\underbrace{U := \left[0,\frac{1}{3}\right)}_{0\in} \cap \underbrace{V := \left(\frac{2}{3},1\right]}_{1\in} = \emptyset$$

$$\underbrace{f^{-1}(U)}_{\in N(A)} \cap \underbrace{f^{-1}(V)}_{\in N(B)} = \emptyset$$

ומצאנו הפרדה סביבתית של A,B. ☺

<u>הגדרה</u>: X מקיימת **תכונת T_0**, כלומר: $(X,\tau) \in T_0$ $(Kolmogorov)$ – אם לכל 2 נקודות שונות $a \neq b$ מתקיים לפחות אחד מהתנאים הבאים:

1) $\exists U \in N(a): b \notin U$

או

2) $\exists V \in N(B): a \notin V$

<u>הגדרה</u>: X מקיימת **תכונת T_1**,

כלומר: $X \in T_1$ אם מתקיימים שתי התנאים מקודם ((1) **וגם** (2)).

<u>תרגיל</u>: התנאים הבאים שקולים:

1) $X \in T_1$

2) כל נקודון סגור.

3) כל תת קבוצה סופית F היא סגורה. (<u>רמז</u>: (t_2^c))

<u>הערה</u>: תמיד $(X,\tau_{cof}) \in T_1$, בעצם τ_{cof} טופולוגיה הכי קטנה על X שמקיימת את תכונה T_1.

<u>הגדרה (תזכורת)</u>: X מקיימת **תכונת Hausdorff** (סימון נוסף: תכונת T_2),

אם לכל 2 נקודות שונות יש סביבות $\underbrace{\text{(פתוחות)}}_{\text{בה"כ}}$ זרות.

<u>הגדרה</u>: X מקיימת **תכונת T_3**, כלומר: $X \in T_3$, אם מתקיימים שני תנאים:

(א) $X \in T_1$.

(ב) לכל נק' a ולכל קבוצה סגורה B $a \notin B$ יש הפרדה סביבתית. רמז: ניקח נקודון $B := \{b\}$

אומרים גם: $Regular\ spaces = T_3$ (ולעיתים רק תנאי $Regular = T_3$(ב))

<u>הערה</u>: $T_3 \subset T_2 \subset T_1 \subset T_0$

<u>הגדרה</u>: X מקיימת **תכונת $T_{3\frac{1}{2}}$**, כלומר: $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, אם:

א) $X \in T_1$.

ב)^f לכל נק' a ולכל קבוצה סגורה B $a \notin B$ קיימת הפרדה פונקציונלית.

__הערות:__

- מהטענה $\Leftarrow$ $T_3 \supset T_{3\frac{1}{2}}$.
- $T_{3\frac{1}{2}}$ אומרים גם תכונת Tychonoff או *רגולרי לחלוטין*

(לעיתים רק על $T_{3\frac{1}{2}}$(ב)^f אומרים – Completely Regular = רגולרי לחלוטין).

__הגדרה:__ X מקיימת **תכונת T_4**, כלומר: $X \in T_4$, אם:

א) $X \in T_1$.

ב) לכל 2 קבוצות סגורות וזרות $A \cap B = \emptyset$, יש סביבות (פתוחות) זרות.

(כלומר $\exists\, U \in N(A), \exists\, V \in N(B): U \cap V = \emptyset$).

__הערות:__

- לעיתים אומרים $Normal\ Space$ = מרחב נורמלי.

(ולעיתים אומרים נורמלי על T_4(ב) בלבד)

- לא קל להבין מדוע $X \in T_4 \Rightarrow X \in T_{3\frac{1}{2}}$

נובע מהמשפט הבא:

__משפט *Urysohn*:__ יהי $X \in T_4$. אז לכל זוג A, B קבוצות __סגורות__ __זרות__ קיימת הפרדה פונקציונלית של A, B.

החלק הלא טריוויאלי בהוכחה נובע מ "$Onion\ Argument$" $of\ Urysohn$.

$$TOP \supset T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset T_{3\frac{1}{2}} \supset T_4 \supset Metriz$$

Spoiler : בהמשך נוכיח $T_4 \supset Metriz$, $T_4 \supset Comp \cap T_2$, וגם את משפט Urysohn.

__הערה:__ לכל ההכלות הנ"ל, יש דוגמאות נגדיות (הן הכלות **ממש**).

ראו קובץ באתר של המרצה – some examples

1) $(\{0,1\}, \tau_{tr}) \in Top$
$(\{0,1\}, \tau_{tr}) \notin T_0$

2) $(\{0,1\}, \tau_*) \in T_0$ (כי $1 \notin \{0\} \in N(0)$)

$(\{0,1\}, \tau_*) \notin T_1$ (כי $\{0\}$ לא סגור)

3) $(\mathbb{R}, \tau_{cof}) \in T_1$ (כל נקודון $\{a\}$ סגור כי $X \setminus \{a\} \in \tau_{cof}$)

$(\mathbb{R}, \tau_{cof}) \notin T_2$

תזכורת: $\tau_{cof} := \{F^c \mid \text{סופית } F \subseteq \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$

הערה: $(X,\tau_{cof}) \notin T_2$ לכל X אינסופית.

בעצם זה לכל 2 קבוצות פתוחות לא ריקות.

$U,V \in \tau_{cof}$ מתקיים $U \cap V \neq \emptyset$ כי $U := F_1^c, V := F_2^c$

ולכן $U \cap V = F_1^c \cap F_2^c = (F_1 \cup F_2)^c \underbrace{=}_{\text{אם נניח}} \emptyset$

אז $X = \underbrace{F_1 \cup F_2}_{\text{סופית}}$

בסתירה! ☺

הגדרה: הסגור - *closure*: עבור $A \subseteq X$ נגדיר

$z \in cl(A) = \bar{A} \overset{def}{=} \forall V \in N(z): V \cap A \neq \emptyset$

$cl(A)$ "הנקודות הכי קרובות" ל A.

הערה: תמיד $A \subseteq cl(A)$.

תרגיל: $A = cl(A) \Leftrightarrow A$ סגורה.

הגדרה: $A \subseteq X$. נגדיר את **הסגור הסדרתי** לפי:

$$z \in scl(A) \overset{def}{=} \exists a_n \in A: a_n \xrightarrow{\tau} z$$

טענה: במ"ט תמיד $A \subseteq scl(A) \subseteq cl(A)$.

הוכחה: הכלה ראשונה נובעת מזה שסדרות קבועות תמיד מתכנסות.

נניח $z \in scl(A)$. אז קיימת סדרה $a_n \in A$ שמתכנסת (במרחב X) ל z.

לכל סביבה $U \in N(z)$ כמעט כל האיברים של a_n נמצאים ב U. אז ברור $U \cap A \neq \emptyset$

לכן $z \in cl(A)$. זה מוכיח $scl(A) \subseteq cl(A)$.

☺

הרצאה 5

שאלה: א. למצוא מ"ט (X,τ) שבו לא תמיד $scl(A)=cl(A)$
(ואז (X,τ) לא מטריזבילי).
ב. אותה שאלה אבל בתנאי נוסף ש $(X,\tau)\in T_2$.

דוגמה א: $(\mathbb{R},\tau_{coc})$ $\tau_{coc}:=\{Y^c\subseteq\mathbb{R}:|Y|\leq\aleph_0\}\cup\{\emptyset\}$
$[0,1]=scl([0,1])\neq cl([0,1])=\mathbb{R}$.

דוגמה ב: נגדיר $X:=\mathbb{R}\cup\{p\}\,,p\notin$
$$\tau:=\{O\subseteq X\,|\,p\in O\Rightarrow|O^c|\leq\aleph_0\}$$

ז"א אם $p\in O$, אז המשלים O^c הוא בן מנייה. נשים לב ש - $\forall x\neq p:\{x\}\in\tau$.

לבדוק:
- $(X,\tau)\in TOP$. לבדוק גם T_2.
- τ לא דיסקרטית (נק' p לא מבודדת).
- תת מרחב טופולוגי $Y:=(\mathbb{R},\tau_Y)$ של מ"ט הנ"ל הוא $\mathbb{R}$ עם טופולוגיה <u>דיסקרטית</u>. ז"א $\tau_Y=P(\mathbb{R})=\tau_{discr}$.
- לבדוק $\mathbb{R}=scl(\mathbb{R})\neq cl(\mathbb{R})=X$
- אם סדרה a_n מתכנסת ב (X,τ) אז היא קבועה לבסוף
- $id:(X,\tau)\to(X,\tau_{discr})$ שומרת על התכנסות סדרות אבל לא רציפה !
- **מסקנה: עיקרון $Heine$ כאן לא מתקיים!**
- $(X,\tau)\notin Metriz$.

תכונות $(int, cl\ ,\partial$, סביבות): במ"ט (X,τ)

1) $\forall a \in X: X \in N(a)$ (רמז: t_1).

2) חיתוך **סופי** של סביבות (פתוחות) גם סביבה (פתוחה). רמז: t_2.

3) $V \in N(a) \Leftarrow \begin{cases} U \in N(a) \\ V \supseteq U \end{cases}$

4) $\boxed{\underbrace{int(A)}_{A^\circ} \subseteq A \subseteq \underbrace{cl(A)}_{\bar{A}}}$.

5) לכל $A_1 \subseteq A_2$ מתקיים:

$int(A_1) \subseteq int(A_2)$

$cl(A_1) \subseteq cl(A_2)$

$scl(A_1) \subseteq scl(A_2)$

6) קריטריון לפתיחות : $\boxed{A \text{ פתוחה} \Leftrightarrow int(A) = A}$

רמז: t_3. $A = \bigcup_{a \in A} O_a$

7) קריטריון לסגירות: $\boxed{A \text{ סגורה} \Leftrightarrow cl(A) = A}$

8) $A^{\circ\circ} = A^\circ$. (ז"א: $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$)

9) $A^\circ \in \tau$ (ז"א A° תמיד פתוחה).

10) $\boxed{(A_1 \cap A_2)^\circ = A_1^\circ \cap A_2^\circ}$ (לכל מספר **סופי**).

11) A° = קב' פתוחה הכי גדולה בין תת קבוצות פתוחות של A, כלומר –

$$\bigcup\{O \subseteq X | O \subseteq A, O \in \tau\}$$

12) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ (ז"א $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$)

13) $\bar{A}$ תמיד קב' סגורה.

14) $\bar{A}$ = קב' סגורה הכי קטנה בין קבוצות סגורות שמכילות את A. כלומר

$$\bigcap\{B \subseteq X | B \supseteq A, B \text{ סגורה ב } X\}$$

15) (הפרשים) נניח O פתוחה, B סגורה. אזי:

א. $O \setminus B$ פתוחה.   ב. $B \setminus O$ סגורה.

<u>הסבר:</u> $O \setminus B = O \cap B^c$ $B \setminus O = B \cap O^c$.

16) **<u>משפט הקשר</u>** בין הסגור והפנים. תמיד מתקיים:

א. $\boxed{cl(A^c) = \left(int(A)\right)^c}$

שקול: ב. $int(A^c) = \left(cl(A)\right)^c$

<u>הוכחה:</u> א $\Leftrightarrow$ ב כי נוכל להציב $A := A^c$. <u>מ"ל (א)</u>

$$x \in \left(int(A)\right)^c$$
$$\Updownarrow$$
$$x \notin int(A)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\, U \in N(x) : U \not\subseteq A$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\, U \in N(x) : \ U \cap A^c \neq \emptyset$$
$$\Updownarrow$$
$$x \in cl(A^c)$$

☺

17) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ (לכל מס' **סופי**).

<u>הגדרה:</u> השפה של A: $\partial(A) := \overline{A} \setminus A^\circ$

18) $\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c}$.

<u>הסבר:</u> $\partial(A) = \overline{A} \setminus A^\circ = \bar{A} \cap (A^\circ)^c \underbrace{=}_{16\text{א.}} \bar{A} \cap \overline{A^c}$

19) $\partial(A)$ תמיד סגורה!

<u>הסבר:</u> כחיתוך של קבוצות סגורות (ראו 18).

20) $\boxed{\partial(A) = \partial(A^c)}$

21) (במ"מ (X,d)) $\partial(A) = \{x \in X | d(x,A) = 0, d(x,A^c) = 0\}$

<u>הסבר:</u> תכונות הסגור במ"מ...

22) $cl(A) = A \cup \partial(A)$ $\operatorname{int}(A) = A \setminus \partial(A)$

<u>הגדרה</u>: תת קבוצה A במ"ט (X,τ) נקראת *צפופה* אם $cl(A)=X$.

שקול: (קריטריון צפיפות) לכל קבוצה פתוחה לא ריקה O מתקיים $A\cap O\neq\varnothing$.

תרגיל: אם A צפופה ב X אז לכל קבוצה פתוחה O מתקיים: $cl(O)=cl(O\cap A)$.

<u>הגדרה</u>: מ"ט (X,τ) נקרא **ספרבילי** אם קיימת ת"ק צפופה <u>ובת מניה</u>.

סימון: $(X,\tau)\in \mathrm{Sep}$.

הערה: תמיד $cl(X)=X$. לכן תמיד X צפופה ב X. לכן מרחב טופולוגי בת מניה תמיד ספרבילי.

הערה: (*משפט* Weierstrass)

$(C[a,b],top(d_{\max}))=cl(P_{\mathbb{Q}}[a,b])=$ {פולינומים רציונליים}

לכן $(C[a,b],top(d_{\max}))\in Sep$.

<u>תרגילים מומלצים</u>:

- $\mathbb{R}^n\in \mathrm{Sep}$
- **הוכיחו**: $l_2\in \mathrm{Sep}$ (רמז: $A:=\{(q_1,q_2,\cdots)\in l_2 : q_k\in\mathbb{Q},\exists n\ \forall i>n\ \ q_i=0\}$)
- $(X,\tau_{discr})\in \mathrm{Sep}$ אם ורק אם X בת מניה.
- חיתוך של 2 (או מספר סופי) קבוצות פתוחות צפופות גם צפופה.
- יהי (X,d) מ"מ. תת קבוצה צפופה ב $(X,\mathrm{top(d)})$ אם ורק אם היא ε-צפופה לכל $\varepsilon>0$.

  הגדרה: A ε-צפופה ב (X,d) אם לכל $x\in X$ קיים $a\in A$ כך ש $d(x,a)<\varepsilon$.

  שקול $\bigcup_{a\in A}B(a,\varepsilon)=X$.

* **הוכיחו**: $l_\infty\notin \mathrm{Sep}$

<u>הגדרה</u>: תת קבוצה A במ"ט X נקראת <u>דלילה</u> (nowhere dense) אם $\mathrm{int}(cl(A))=\varnothing$.

למשל: קו ישיר דליל במישור. מישור דליל במרחב תלת ממדי.

נקודון במרחב מטרי דליל אם ורק אם היא לא מבודדת.

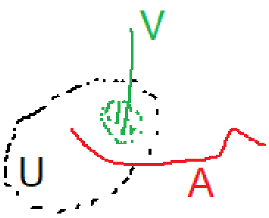
משפט: (**קריטריונים לקבוצות דלילות**) התנאים הבאים שקולים:

א. A דלילה במ"ט X (ז"א $\operatorname{int}(cl(A))=\varnothing$).

ב. $X\setminus cl(A)$ צפופה ב X.

ג. $cl(A)$ לא מכיל אף תת קבוצה פתוחה לא ריקה.

ד. לכל קבוצה פתוחה לא ריקה U קיימת קבוצה פתוחה V כך ש:
$V\cap A=\varnothing \quad \varnothing\neq V\subseteq U$.



הוכחה:

א $\Leftarrow$ ב

$$\operatorname{int}(cl(A))=\varnothing$$

$$X\setminus\operatorname{int}(cl(A))=X$$

מכאן, לפי **משפט הקשר**, נקבל

$$cl(X\setminus cl(A))=X$$

ב $\Leftarrow$ ג

נניח בשלילה שקיימת ק"פ $\varnothing\neq O\subseteq cl(A)$. אז $O\cap(X\setminus cl(A))=\varnothing$.

מכאן $X\setminus cl(A)$ לא צפופה ב X (ראו קריטריון צפיפות).

ג $\Leftarrow$ ד

נניח בשלילה שקיימת ק"פ $U\neq\varnothing$ כך שלכל ת"ק פתוחה $\varnothing\neq V\subseteq U$ מתקיים $V\cap A\neq\varnothing$

אז כל נקודה של U היא נקודת סגור של A. זאת אומרת $U\subseteq cl(A)$. סתירה לתנאי ג.

ד $\Leftarrow$ א

נניח בשלילה שלא. אז $U:=\operatorname{int}(cl(A))\neq\varnothing$. לכל ת"ק **פתוחה** $\varnothing\neq V\subseteq U$ מתקיים $\varnothing\neq V\subseteq\operatorname{int}(cl(A))\subseteq cl(A)$. אבל אז לפי הגדרת סגור $V\cap A\neq\varnothing$. סתירה לתנאי ד.

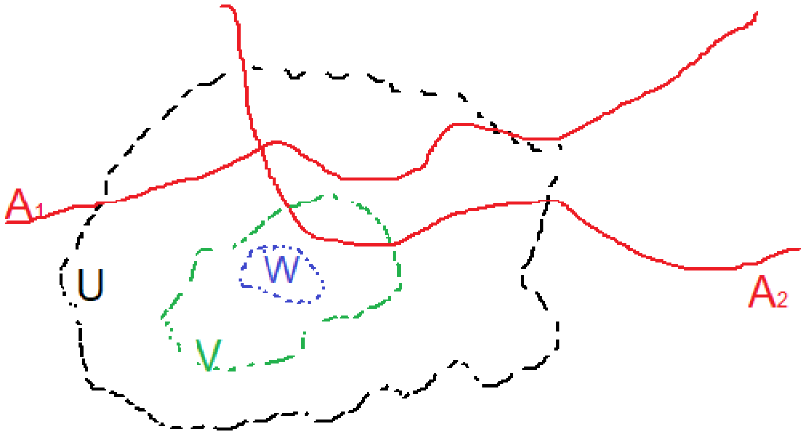
☺

תרגילים מומלצים:

1. A דלילה ב X אם"ם $cl(A)$ דלילה ב X.
2. אם A דלילה ב X אז A^c צפופה ב X.
3. איחוד בן מניה של קבוצות דלילות לא תמיד קבוצה דלילה.

<u>טענה</u>: איחוד **סופי** של קבוצות דלילות גם קבוצה דלילה.

הוכחה:
נניח A_1, A_2 דלילות ב X. צ"ל $A_1 \cup A_2$ דלילה ב X.



נשתמש בסעיף ד של המשפט.
נניח U פתוחה לא ריקה. A_1 דלילה ב X. לכן קיימת ק"פ V כך ש
$V \cap A_1 = \varnothing \quad \varnothing \neq V \subseteq U$.
A_2 דלילה ב X. לכן קיימת ק"פ W כך ש
$W \cap A_2 = \varnothing \quad \varnothing \neq W \subseteq V$.
אז $W \cap (A_1 \cup A_2) = \varnothing \quad \varnothing \neq W \subseteq U$.

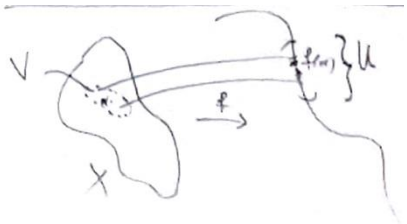
☺

<u>הגדרה</u>: מ"ט נקראת *מקטגוריה ראשונה* אם הוא איחוד בן מניה של קבוצות דלילות.
אחרת, הוא נקרא *מקטגוריה שניה*.

<u>הערה</u>: **<u>משפט Baire</u>** אומר שכל מרחב מטרי **שלם** הוא מקטגוריה שניה
(ראו למשל "טופולוגיה קבוצתית" של האוניברסיטה הפתוחה, כרך א, עמוד 89).
<u>משפט יותר חזק</u>: לכל מרחב מטרי שלם (או לכל מרחב קומפקטי מקומית האסדורפית)
חיתוך בן מנייה של קבוצות צפופות פתוחות הוא צפוף.

רציפות פונקציות

<u>תזכורת: (רציפות בנקודה):</u> נניח שנתונה פו' בין מ"ט $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$. f נקראת **רציפה בנקודה** $a \in X$ אם: $\boxed{\forall\, U \in N(f(a))\ \exists\, V \in N(a): f(V) \subseteq U}$



<u>שקול:</u> $\forall\, U \in N(f(a)): f^{-1}(U) \in N(a)$

(מילולית: מקור של סביבה (ל $f(a)$) גם סביבה (ל a)).

<u>משפט (קריטריון לרציפות):</u> נניח $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ פו' בין מ"ט. התנאים שקולים:

1) f רציפה (בכל נקודה).

2) מקור של כל קב' פתוחה גם פתוחה.

3) מקור של כל קב' סגורה גם סגור.

4) $\forall\, A \subseteq X: z \in cl(A) \Rightarrow f(z) \in cl(f(A))$.

5) $f(cl(A)) \subseteq cl(f(A))$.

<u>הוכחה:</u>

<u>$(1) \Leftarrow (2)$:</u>

נניח $O \in \sigma$. צ"ל $f^{-1}(O) \in \tau$.

לכל $a \in f^{-1}(O)$ צ"ל ש $a \in int(f^{-1}(O))$

(קריטריון לפתיחות: A פתוחה $\Leftrightarrow int(A) = A$).

$$a \in f^{-1}(O)$$
$$\Downarrow$$
$$f(a) \in O \in \sigma$$
$$\Downarrow$$
$$O \in N(f(a))$$

הגדרת הרציפות בנקודה a

$$\Downarrow$$

$$a \in f^{-1}(O) \in N(a)$$

הגדרת נקודות פנים

$$\Downarrow$$

$$a \in int\left(f^{-1}(O)\right)$$

$(2) \Leftrightarrow (3)$: כי $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c$.

$(4) \Leftrightarrow (5)$: ברור.

נוכיח $(3) \Rightarrow (5)$:

נניח $A \subseteq X$. צ"ל $f\left(cl(A)\right) \subseteq cl\left(f(A)\right)$.

$$A \subseteq f^{-1}\left(f(A)\right) \subseteq f^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right)$$

המעבר האחרון נובע מזה ש $f(A) \subseteq cl\left(f(A)\right)$. נפעיל "$cl$" בשני האגפים:

$$cl(A) \subseteq cl\left(f^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right)\right) \overset{(*)}{=} f^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right)$$

(בהפעלת cl יש "מונוטוניות" $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow cl(A_1) \subseteq cl(A_2)$).

<u>הסבר $(*)$:</u>

א) $cl(B)$ סגור.

ב) נתון (3).

ג) B סגור $\Leftrightarrow cl(B) = B$.

כעת, נפעיל f על שני האגפים לקבל:

$$f\left(cl(A)\right) \subseteq ff^{-1}\left(cl\left(f(A)\right)\right) \subseteq cl\left(f(A)\right)$$

נוכיח $(4) \Rightarrow (1)$:

נניח בשלילה ש - (1) לא נכון. ז"א, f לא רציפה בנקודה מסוימת $a \in X$.

ז"א, קיימת <u>סביבה פתוחה</u> U של $f(a)$ כך ש - $f^{-1}(U) \notin N(a)$.

שקול: $a \notin int\left(f^{-1}(U)\right)$

שקול: $cl\left(f^{-1}(U)^c\right) \underbrace{=}_{\text{תכונת הקשר}} \left(int\left(f^{-1}(U)\right)\right)^c \ni a$

בגלל נתון (4) נקבל:

$$f(a) \in cl\left(f(f^{-1}(U)^c)\right) = cl\left(f(f^{-1}(U^c))\right) \subseteq cl(U^c) = U^c$$

(המעבר האחרון נובע כי U פתוחה ולכן $Y \setminus U$ סגורה, וסגור של סגורה שווה לעצמה).

קיבלנו: $f(a) \notin U$ בסתירה לנתון!

☺

<u>**משפט**</u>: $(\text{Heine-}\frac{1}{2})$ כל f רציפה שומרת על התכנסות סדרות.

<u>**הוכחה:**</u>

$$x_n \overset{\tau}{\to} a \underbrace{\Rightarrow}_{\text{צריך להוכיח}} f(x_n) \overset{\sigma}{\to} f(a)$$

שקול להוכיח – $\forall\, U \in N\big(f(a)\big)\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: f(x_n) \in U$

עבור $U \in N\big(f(a)\big)$ המקור $f^{-1}(U) \in N(a)$ (בגלל רציפות f בנקודה a).

נתון $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

וגם ידוע $f^{-1}(U) \in N(a)$ ולכן קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש – $x_n \in f^{-1}(U)$

מכאן $\forall n \geq n_0: f(x_n) \in U$

☺

<u>**הערה חשובה:**</u> במ"מ ההיפך גם נכון (עיקרון $Heine$). אבל זה לא תמיד נכון במ"ט ! (אפילו אם מתקיימת תכונת האוסדורף).

ראו דוגמה ב מתחילת ההרצאה

$id : (X,\tau) \to (X,\tau_{discr})$ שומרת על התכנסות סדרות אבל לא רציפה.

<u>**תכונות נוספות של פונקציות רציפות:**</u>

- כל $(Y,\sigma) \overset{f}{\to} (X,\tau_{discr})$ תמיד רציפה.
- כל $(Y,\tau_{tr}) \overset{f}{\to} (X,\tau)$ תמיד רציפה.
- הרכבה $f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_3$ של פונקציות רציפות $f_1 : X_1 \to X_2$ $f_2 : X_2 \to X_3$ היא גם רציפה.
- הוכיחו שבכל במ"ט (X,τ) ולכל $f_1, f_2 \in C(X)$ מתקיים :

א) $f_1 + f_2 \in C(X)$.

ב) $f_1 \cdot f_2 \in C(X)$.

ג) $\frac{f_1}{f_2} \in C(X)$ בתנאי ש - $f_2(x) \neq 0$ לכל $x \in X$.

הערה: נוח לבדוק "דרך סביבות".

משפט (תורשתיות של רציפות): $f: X \to Y$ רציפה, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ כך ש $f(A) \subseteq B$. אזי פונקציה מושרית $\boxed{\begin{array}{c} A \xrightarrow{f_0} B \\ a \mapsto f(a) \end{array}}$ גם רציפה.

__הוכחה:__

בודקים לפי קריטריון רציפות מספר 2 (ז"א מקור של קבוצה פתוחה הוא גם פתוח).

צ"ל שלכל קבוצה פתוחה $O \cap B$ (כאשר $O \in \tau_Y$) ב – B מתקיים $f_0^{-1}(O \cap B)$ פתוחה ב- A.

$$\begin{aligned} f_0^{-1}(O \cap B) &= \{x \in A | f(x) \in O \cap B\} = f^{-1}(O \cap B) \cap A \\ &= f^{-1}(O) \cap f^{-1}(B) \cap A \underbrace{=}_{f(A) \subseteq B} \underbrace{f^{-1}(O)}_{\substack{\text{פתוחה ב}-X \\ \text{בגלל רציפות } f}} \cap A \end{aligned}$$

לכן $f^{-1}(O) \cap A$ קבוצה פתוחה ב A (תת מרחב).

☺

הרצאה 6

שאלה כללית: אילו תכונות נשמרות על ידי "תמונה רציפה" ?

בהמשך נוכיח זאת עבור מספר תכונות. למשל : ספרביליות , קשירות,

קשירות מסילתית, קומפקטיות, קומפקטיות סדרתית ...

(פונקציה **רציפה על** $f: X \to Y = f(X)$)

משפט: צפיפות וספרביליות נשמרות על ידי תמונה רציפה.

הוכחה: נניח $f: X \to Y$ רציפה על, ז"א $f(X) = Y$.

צ"ל $\bar{A} = X \Leftarrow \overline{f(A)} = Y$.

שקול להוכיח $\overline{f(A)} = f(X)$.

לפי קריטריון (5) של רציפות מתקיים: $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

נציב $\bar{A} = X$ ונקבל $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$.

מצד שני, $\overline{f(A)} \subseteq Y = f(X)$.

לכן קיבלנו: $\overline{f(A)} = f(X) = Y$

והוכחנו שנשמרת צפיפות.

עכשיו אם ניקח $X \in Sep$ אז קיים $A \subseteq X$ כך ש - $|A| \le \aleph_0$, $\bar{A} = X$.

אז $\overline{f(A)} = f(X) = Y$.

$|f(A)| \le \aleph_0$ גם בת מנייה! מכאן גם $Y \in Sep$.

☺

איזומורפיזמים במרחבים טופולוגיים

תזכורת: איזומורפיזם ב $Metr$ = איזומטריות.

איזומורפיזם ב TOP = $homeomorphism$.

הגדרה: נניח $(X_1, \tau_1) \xrightarrow{f} (X_2, \tau_2)$ פונקציה בין מ"ט. f נקרא **הומיאומורפיזם**

(Homeomorphism *אזהרה: זה לא Homomorphism*)

אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

א) f חח"ע + על (ז"א קיימת <u>פונקציה</u> f^{-1}).

ב) f רציפה.

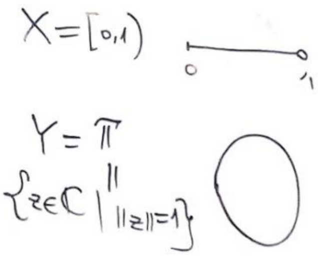
ג) f^{-1} רציפה.

<u>הערה:</u> $\left.\begin{matrix}(א)\\(ב)\end{matrix}\right\} \not\Rightarrow (ג)$ אפילו במקרים טבעיים.

<u>דוגמה 1:</u> $f = id : (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \to \mathbb{R}$ רציפה אבל לא $f^{-1} : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \tau_{discr})$

$\{0\} \in \tau_{discr}$ אבל $(f^{-1})^{-1}(0) = \{0\} \notin \tau$.

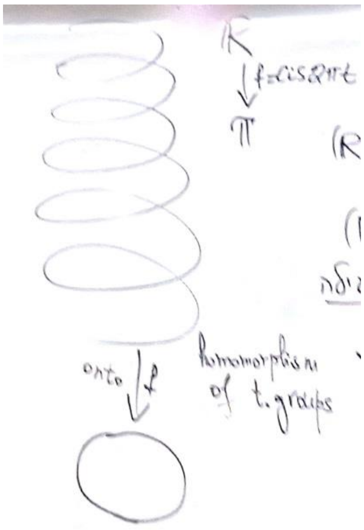
<u>דוגמה 2:</u> (גיאומטרית) $f : [0,1) \to \mathrm{T}$

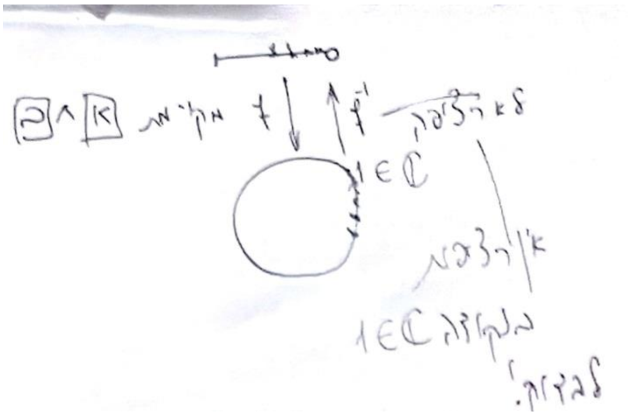


$$q : \mathbb{R} \to \mathrm{T} := \{z \in \mathbb{C} : \| z \| = 1\}, \quad q(t) = cis(2\pi t) = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)$$

זאת פונקציה רציפה (וגם הומומורפיזם חבורות).

כעת נגדיר צמצום של פונקציה הנ"ל $f : [0,1) \to \mathrm{T}$.





אז $f : [0,1) \to \mathrm{T}$ רציפה חח"ע ועל

אבל $f^{-1} : \mathrm{T} \to [0,1)$ לא רציפה בנקודה $z = 1 \in T$.

(למצוא תת קבוצה פתוחה (סגורה) ב $[0,1)$ כך שהמקור לא פתוחה (לא סגורה) ב T)

<u>הגדרה:</u> נסמן $(X_1, \tau_1) \simeq (X_2, \tau_2)$ אם קיים $X_1 \xrightarrow{f} X_2$ $homeomorphism$ ונגיד

מרחבים **הומיאומורפיים**.

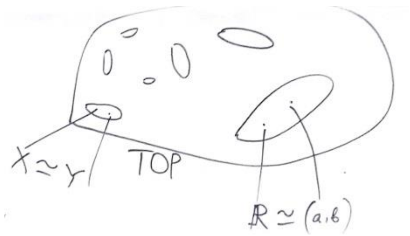
תכונות שמחלקות את TOP למחלקות :

1) $(X,\tau) \simeq (X,\tau)$.

2) $(X_2,\tau_2) \simeq (X_1,\tau_1) \Leftarrow (X_1,\tau_1) \simeq (X_2,\tau_2)$.

3) $\begin{cases}(X_1,\tau_1) \simeq (X_2,\tau_2) \\ (X_2,\tau_2) \simeq (X_3,\tau_3)\end{cases} \Rightarrow (X_1,\tau_1) \simeq (X_3,\tau_3)$.

(בשביל להוכיח את (1) משתמשים ב - id, בשביל (2) ב - f^{-1} ובשביל (3) $f_1 \circ f_2$).



<u>**שאלה חשובה**</u>: מתי 2 מרחבים טופולוגיים X,Y הם הומיאומורפיים

או ומתי לא ? $X \simeq Y$ או $X \not\simeq Y$

<u>**שאלה יותר כללית**</u>: מתי קיימת פונקציה רציפה **ועל** $X \xrightarrow{f} Y$ (ז"א מתי Y = "תמונה רציפה" של X).

<u>**הערה**</u>: מה התכונות שנשמרות ע"י הומיאומורפיזמים או ע"י תמונה רציפה ?

א) כל תכונה טופולוגית נשמרת ע"י הומיאומורפיזם.

ב) כל תכונה מטרית נשמרת ע"י איזומטריה.

דוגמאות להומיאומורפיזמים:

- הרכבה של פונקציות רציפות (הומיאומו') גם רציפה (הומיאומו').
- אם $f : X \to Y$ רציפה (הומיאומו') אז גם $f : A \to f(A)$ רציפה (הומיאומו').
- כל איזומטריה בעצם הומיאומורפיזם (ההיפך לא תמיד נכון!).
- בכל מרחב נורמי $(E, \|\cdot\|)$: כפל בסקלר $c \neq 0$ תמיד הומיאומורפיזם $M_c: E \to E \in Lip_{|c|}$: $M_c(x) = c \cdot x$, $0 \neq c \in \mathbb{R}$ קבוע נתון.

$$\boxed{M_c^{-1} = M_{c^{-1}}}$$

- <u>**משפט**</u>: כל מרחב נורמי $\underbrace{\simeq}_{\text{הומיאומורפי}}$ לכל כדור פתוח שלו.

הוכחה:

שלב א' $\forall r > 0, \forall a \in E: B_r(a) \simeq B_1(0)$

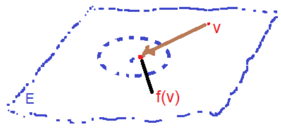
כי: $B_1(0) \underbrace{\simeq}_{M_r} B_r(0) \underbrace{\simeq}_{T_a} B_r(a)$

הערה: הרכבה של הומיאומורפיזם גם עם צמצום מלא (גם בטווח) הוא הומיאומורפיזם.

שלב ב' מ"ל ש: $E \underbrace{\simeq}_{f} B_1(0)$.

נגדיר $\boxed{f(v) = \frac{1}{1+\|v\|} \cdot v}$ $\quad f : E \to B(0_E,1)$

$f(v) \in B(0_E,1) \Leftarrow \| f(v) \| = \| \frac{1}{1+\|v\|} v \| = \frac{\|v\|}{1+\|v\|} < 1$



$f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\|x\|} \cdot x \qquad f^{-1} : B(0_E,1) \to E$

☺

תוצאות:

$\mathbb{R} \simeq (-1,1) \simeq (a,b) \quad \forall a < b$

$\mathbb{R}^n \simeq B(v,r) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^2 \simeq$ **עיגול פתוח** $\simeq (-a,a) \times (-a,a)$

(רמז: $\| \ \|$ שקול טופולוגית ל $\| \ \|_{max}$ ב $\mathbb{R}^2$)

הערה: הומיאומורפיזם לא תמיד שומר על תכונות מטריות (חסימות, שלמות, ...)

המשך דוגמאות:

- $[a,b] \simeq [c,d]$ כאשר $a < b \, , c < d$
- $(a,\infty) \simeq (c,d) \simeq (-\infty,b)$

(חלק מההסבר: $(0,\infty) \underset{\log_2}{\overset{2^x}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}$).

תרגיל: למיין קטעים ב - $\mathbb{R}$:

א) עד כדי הומיאומורפיזמים (כן יחס שקילות!).

ב) עד כדי תמונה רציפה (לא יחס שקילות!).

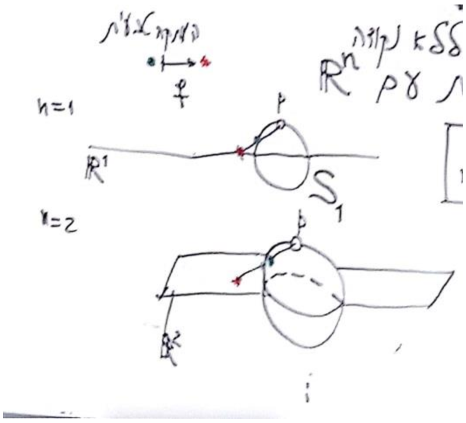
- היטל סטריאוגרפי

טענה: ספירה n מימדית S_n ללא נקודה אחת היא הומיאומורפית עם $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{S_n/\{z\} \simeq \mathbb{R}^n}$$

ניזכר כי: $S_n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \big| \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$

למשל: כאשר $n = 1,2$ נגדיר f לפי:



קשירות

הערה: לכל מ"ט (X,τ) תת קבוצות $\emptyset, X$ תמיד סגוחות (כי $X = \emptyset^c$, $\emptyset = X^c$).

השאלה: מתי יש סגוחות נוספות לא טריוויליות ?

הגדרות: נניח (X,τ) מ"ט.

א) $X = X_1 \cup X_2$ נקרא **פירוק טופולוגי** אם:

$$\begin{cases} X_1 \cap X_2 = \emptyset \\ X_1, X_2 \text{ פתוחות} \\ \text{לא ריקות} \end{cases}$$

לתנאי השני שקול – סגורות, וגם שקול – **סגוחות**.

ב) אומרים (X,τ) **קשיר** $(Connected)$ ונסמן: $(X,\tau) \in Conn$ אם **לא** קיים פירוק טופולוגי

<u>הערה חשובה</u>: (X,τ) **לא קשיר** אם ורק אם קיימת תת קבוצה סגוחה לא ריקה ששונה מ X.

- אם: $[2,4)\cup(5,\infty) = \underbrace{X}_{\text{כתת מרחב}} \subset \mathbb{R}$

  אז X **לא קשיר**. שימו לב ש $(5,\infty)$ ו $[2,4)$ **סגוחות** ב X (לא ב $\mathbb{R}$).

- מרחב מטרי של רציונליים $\mathbb{Q}$ (כתת מרחב בממשיים) לא קשיר.

יש אינסוף ת"ק סגוחות ובהתאם יש אינסוף "פירוקים טופולוגיים". למשל:

$$X_1 = \left(-\infty, \sqrt{2}\right) \cap \mathbb{Q}$$

$$X_2 = \mathbb{Q} \cap \left(\sqrt{2}, \infty\right)$$

- הוכיחו שמרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ (עם מטריקה p –אדית) הוא לא קשיר.

<u>הגדרה:</u> נניח $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2) \in TOP$ כך ש - $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ $X_1 \neq \varnothing, X_2 \neq \varnothing,$.

מגדירים **סכום טופולוגי** $X = X_1 \sqcup X_2$ <u>כקבוצה</u> $X = X_1 \cup X_2$ עם <u>טופולוגיה</u> הבאה

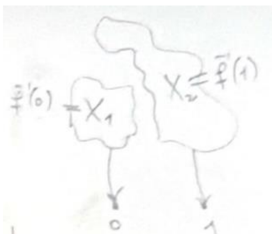
$$\tau := \{O_1 \cup O_2 | O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$$

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שמרחב לא קשיר אם"ם הוא הומיאומורפי לסכום טופולוגי.

<u>משפט:</u> התנאים הבאים שקולים:

1) $(X,\tau) \notin Conn$ (ז"א לא קשיר).

2) קיימת פונקציה רציפה – $X \xrightarrow{f} [0,1]$ כך ש $f(X) = \{0,1\}$



<u>הוכחה</u>: $1 \Rightarrow 2$ לפי משפט רציפות ש"ל מקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (יש 4 מקרים...)

$$f^{-1}(O) = \begin{cases} X & \{0,1\} \subset O \\ \varnothing & \{0,1\} \cap O = \varnothing \\ X_1 & \{0,1\} \cap O = \{0\} \\ X_2 & \{0,1\} \cap O = \{1\} \end{cases}$$

$2 \Rightarrow 1$ $\quad X = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$ פירוק טופולוגי (מדוע ?)

☺

<u>שימו לב:</u> אין תכונת ערך ביניים! בהמשך זה נותן מחצית ל- "משפט ערך ביניים".

<u>תרגיל</u>: הוכיחו (הכללת המשפט הקודם) נקודות אי-רציפות של פונקציה האופיינית χ_A של $A \subseteq X$ היא $\partial(A)$. כאשר:

$$\chi_A : X \to \{0,1\},\ \chi_A(a)=1 \quad \forall a \in A, \quad \chi_A(x)=0 \quad \forall x \notin A$$

הערה: $A \subseteq X$ סגורה אם ורק אם $\partial(A)=\emptyset$.

<u>משפט</u>: קשירות נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הוכחה:

נניח ש $X \in Conn$. מאחר ו- f על אז $f(X)=Y$. צ"ל $Y \in Conn$.

אם נניח שלא, אז Y פריק טופולוגית: $Y = \underbrace{Y_1}_{\neq\emptyset} \sqcup \underbrace{Y_2}_{\neq\emptyset}$ כאשר Y_1, Y_2 פתוחות.

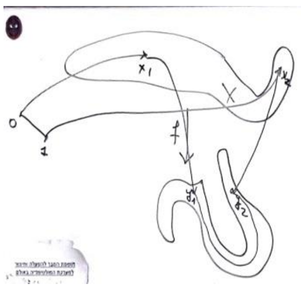
אזי $X = f^{-1}(Y_1) \sqcup f^{-1}(Y_2)$

כאשר $f^{-1}(Y_1), f^{-1}(Y_2) \neq \emptyset$ (כי f היא פונקציה על) וגם הן **פתוחות** כי f רציפה.
קיבלנו ש X פריק, ז"א $X \notin Conn$ בסתירה!

<u>הגדרה</u>: מ"ט X **קשיר מסילתית** אם לכל $x,y \in X$ קיימת מסילה מ x ל y. **מסילה** מ x_1 ל x_2 $[0,1] \xrightarrow{\varphi} X$ פונקציה רציפה, $\varphi(0)=x_1$, $\varphi(1)=x_2$. סימון: $X \in PConn$.

<u>משפט</u>: קשירות מסילתית נשמרת ע"י תמונה רציפה.

הוכחה: נניח ש - $X \in PConn$. f על ורציפה אז $f(X)=Y$. צ"ל - $Y \in PConn$.



נניח $y_1, y_2 \in Y$, אז קיימים $x_1 \xrightarrow{f} y_1$, $x_2 \xrightarrow{f} y_2$ כי f על.

קיימת מסילה מ x_1 ל x_2 $[0,1] \xrightarrow{\varphi} X$ פונקציה רציפה, $\varphi(0)=x_1$, $\varphi(1)=x_2$.

נגדיר מסילה – $[0,1] \xrightarrow{f\circ\varphi} Y \qquad [0,1] \xrightarrow{\varphi} X \xrightarrow{f} Y$

ואז מצאנו מסילה בין y_1 ל - y_2.

☺

אזהרה: תמונה $f[0,1]$ של המסילה לא תמיד הומיאומורפי ל $[0,1]$.

למשל ידוע שקיימת פונקציה רציפה **ועל** $f:[0,1]\to[0,1]^2$ (Peano curve).

<u>משפט</u>: $PConn \subset Conn$.

הוכחה: נניח $X \in PConn$. צ"ל $X \in Conn$.

אם נניח בשלילה שלא, אז X פריק: $X = X_1 \sqcup X_2$

נבחר $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

$X \in PConn \Leftarrow$ קיימת מסילה מ x_1 ל x_2, לכן

$[0,1] \xrightarrow{\varphi} X \quad \varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2$

כעת $[0,1] = \varphi^{-1}(X_1) \sqcup \varphi^{-1}(X_2)$

$\varphi^{-1}(X_1)$, $\varphi^{-1}(X_2)$ קבוצות זרות פתוחות (רציפות !)

לא ריקות $(0 \in \varphi^{-1}(X_1), 1 \in \varphi^{-1}(X_2))$

ואז קיבלנו פירוק של $[0,1]$ בסתירה לכך ש - $[0,1] \in Conn$.

☺

טענה: $[0,1] \in Conn$.

הוכחה: נניח בשלילה שיש פירוק טופולוגי $[0,1] = X_1 \cup X_2$. בה"כ $0 \in X_1, 1 \in X_2$.

X_1 פתוחה ב $[0,1]$. לכן קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $[0,0+\varepsilon) \subset X_1$.

נסמן $A := \{x \in [0,1] : [0,x) \subset X_1\}$ $c := \sup A,$.

אז $[0,0+\varepsilon) \subset A$, $0 < c$.

נוכיח ש $c \in A$.

צ"ל $[0,c) \subset X_1$.

אכן, לכל $x \in [0,c)$ (לפי הגדרת $c := \sup A$) קיים $\exists y \in A \;\; x < y < c$.

ז"א $[0,y) \subset A$

קבוצה X_1 סגורה ב $[0,1]$. לכן $c \in cl[0,c) \subset cl(X_1) = X_1$.

מצד שני X_1 פתוחה ב $[0,1]$. לכן עבור נקודה c קיים $\varepsilon > 0$ כך ש
$(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap [0,1] = (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset X_1$ (קחו בחשבון ש $0 < c$)

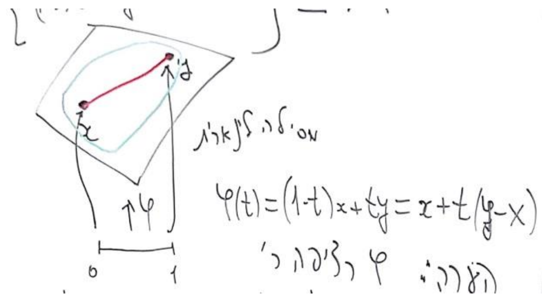
בפרט $[c,c+\varepsilon)\subset X_1$.

נקבל $[0,c)\cup[c,c+\varepsilon)=[0,c+\varepsilon)\subset X_1$.

מכאן $c+\varepsilon\in A$. אבל אז מתקבלת סתירה עם הגדרת $c:=\sup A$.

מש"ל

הגדרה: תת קבוצה X במ"נ $(E,\|\cdot\|)$ נקראת **קבוצה קמורה** $(convex)$ אם לכל $x,y\in X$ מתקיים $X \supseteq \{(1-t)x+ty: 0\le t\le 1\}$ (מסילה לינארית)   נסמן $X\in Conv$.



הערה:

φ רציפה כי $\varphi\in Lip_{\|y-x\|}$.

דוגמה: כל מ"נ $(E,\|\cdot\|)$ וכדורים בתוכו (פתוחים, סגורים) קבוצות קמורות ב E.

טענה: $\boxed{Conv \subsetneq PConn \subsetneq Conn}$

הרצאה 7

הגדרה: $\mathbb{R}\supseteq X\neq\varnothing$ **קטע** אם לכל $a,b\in X$ מתקיים $[a,b]\subseteq X$.

<u>טענה</u>: נניח $X\subset\mathbb{R}$ תת מרחב. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) X "קטע"   (יתכן כמובן לא חסום)

2) $X\in Conv$

3) $X\in PConn$

4) $X\in Conn$

הסבר: $(2)\Leftarrow(1)$: לכל $a,\mathrm{b}\in X$ מתקיים $[a,\mathrm{b}]\subseteq X$. מצד שני $[a,\mathrm{b}]=\{a+(b-a)t\mid 0\le t\le 1\}$.

$(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)$ נובע מהכלות ברורות $Conv\subseteq PConn\subseteq Conn$.

$(4)\Rightarrow(1)$ אם נניח שלא, אז X לא קטע, כלומר קיימים $a,\mathrm{b}\in X$ כך ש $[a,\mathrm{b}]\not\subset X$.

ז"א קיימים: $a<c<b$ כך ש $a,b\in X$ אבל $c\notin X$.

נגדיר $X_1\coloneqq(-\infty,c)\cap X, X_2\coloneqq(c,\infty)\cap X$

ואז נקבל ש $X=\underbrace{X_1}_{a\in}\sqcup\underbrace{X_2}_{b\in}$ פירוק טופולוגי.

ואז קיבלנו ש $X\notin Conn$ בסתירה!

☺

<u>**משפט**</u> **(ערך הביניים):** נניח X מ"ט. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) $X\in Conn$.

2) לכל פונקציה רציפה $X\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ ממשית יש תכונת ערך ביניים.

<u>**הוכחה:**</u> $(2)\Leftarrow(1)$: תמונה רציפה שומרת על $Conn$. לכן $Conn\ni f(X)\subset\mathbb{R}$ ואז מהטענה הקודמת נקבל ש - $f(X)\ni\{$קטעים$\}$, ואז $f(X)$ בעל תכונת ערך הביניים.

$(1)\Leftarrow(2)$: נניח בשלילה שלא. אז $X\notin Conn$. ז"א קיים פירוק טופולוגי $X=X_1\sqcup X_2$

נגדיר פונקציה $X\xrightarrow{f}\mathbb{R}$, אשר שולחת את X_1 ל 0 ואת X_2 שולחת ל 1.

X_1, X_2 פתוחות ב X ⇐ קל לבדוק (4 מקרים) שאכן מקור של קבוצה פתוחה גם קבוצה פתוחה, ואז f רציפה. אבל נקבל ש $f(X)=\{0,1\}$.

וזאת לא מקיימת את תכונת ערך הביניים, בסתירה!

☺

<u>**משפט**</u> **(האלומות – תנאי מספיק לקשירות):** נניח X מ"ט, $X=\bigcup_{j\in J}Y_j$ כך ש:

1) $\forall j\in J: Y_j\in Conn$

2) $\bigcap_{j\in J}Y_j\neq\emptyset$

אזי $X\in Conn$.

הוכחה: מתכונה (2) קיימת נקודה משותפת $z\in\bigcap_{j\in J}Y_j$.

נניח בשלילה ש – X פריק, אזי קיימות קבוצות זרות ופתוחות ולא ריקות X_1,X_2 כך ש –

$$X=X_1\sqcup X_2$$

בה"כ $z\in X_1$ (ואז $z\notin X_2$).

מתקיים $\forall j \in J: Y_j = (Y_j \cap X_1) \sqcup (Y_j \cap X_2)$

כעת נשים לב ש $Y_j \cap X_1$ ו $Y_j \cap X_2$ פתוחות וזרות בתת מרחב Y_j ו$z \in Y_j \cap X_1$.

אז $Y_j \cap X_2 = \emptyset$ לכל j, אחרת היינו מקבלים ש $Y_j \notin Conn$ (פריק).

כעת $X_2 = \bigcup_{j \in J}(X_2 \cap Y_j) = \emptyset$ בסתירה לפירוק של X.

☺

תוצאות:

1) נניח $X = Y_1 \cup Y_2$, כאשר $Y_1, Y_2 \in Conn$, $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. אזי $X \in Conn$

2) **שרשור**

נניח $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Y_k$, כאשר $Y_k \in Conn$ לכל $k \in \mathbb{N}$ וכן –

$$\forall k \in \mathbb{N}: Y_k \cap Y_{k+1} \neq \emptyset$$

אזי $X \in Conn$.

הסבר: 1) מיידי מהמשפט!

2) נובע מ (1) ואינדוקציה נובע מקרה של מס' סופי של הגורמים.

$$\forall k \in \mathbb{N}: A_k \coloneqq Y_1 \cup Y_2 \cup \ldots \cup Y_k \in Conn$$

נשים לב $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$

וברור $A_1 \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \neq \emptyset$

לכן לפי משפט האלומות נקבל ש $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in Conn$.

☺

הגדרה: (**מרכיבי קשירות**): במ"ט X נגדיר את היחס הבא

$x \equiv y \overset{def}{=}$ אם "אפשר לחבר x ל y ע"י קבוצה קשירה". זאת אומרת, קיימת

$$Conn \ni A_{x,y} \subset X$$

כך ש $\{x, y\} \subset A$

טענה: היחס הנ"ל הוא יחס שקילות.

הסבר:

1) $x \equiv x$ הסבר: $A_{x,x} = \{x\}$.

2) $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$, הסבר: $A_{y,x} \coloneqq A_{x,y}$.

3) צ"ל $\begin{cases} x \equiv y \\ y \equiv z \end{cases} \Leftarrow x \equiv z$ הסבר: $A_{x,z} \coloneqq A_{x,y} \cup A_{y,z}$

ואכן $y \in A_{x,y}$ וגם $y \in A_{y,z}$ ואז מתוצאה 1 (שירשור) נקבל ש - $A_{x,z} \in Conn$.

<u>הגדרה</u>: מרכיב קשירות של נק x ב X הוא $[x] \coloneqq \{y \in X | x \equiv y\}$ "מחלקה של x".

כאשר $x \equiv y \Leftrightarrow \exists A_{x,y} \in Conn, \{x,y\} \subseteq A_{x,y} \subseteq X$

תכונות מרכיבי קשירות:

- $X = \cup_{x \in X}[x]$ (יש חזרות! $x \equiv y \Leftrightarrow [x] = [y]$).
- מס' (עוצמה) של מרכיבי קשירות נשמר ע"י הומיאומורפיזמים.
- X קשיר $\Leftrightarrow$ יש מרכיב קשירות 1 בלבד.

  רמז: משפט האלומות.

- $[x] \in Conn$
- $[x] = \cup\{A \subseteq X | x \in A , A \in Conn\}$

ז"א $[x] =$ תת קבוצה קשירה הגדולה ביותר המכילה את x.

- $[x]$ סגור ב X.

רמז: תוכיחו קודם את הטענה הבאה (ואז תשתמשו בתכונה הקודמת):

<u>טענה</u>: (תרגול) נניח $X = \bar{Y}$ (ז"א Y צפופה ב X). אם $Y \in Conn$ אז גם $X \in Conn$.

דוגמה: תארו מרכיבי קשירות של:

א. $X = (0,2) \cup (2,5) \cup \{7\}$

תשובה: $[1] = (0,2), [3] = (2,5), [7] = \{7\}$

ב. $X = \{1,2,3,4\} \times \mathbb{R}$

תשובה: $\{1\} \times \mathbb{R}, \{2\} \times \mathbb{R}, \{3\} \times \mathbb{R}, \{4\} \times \mathbb{R}$.

הגדרה: מ"ט X נקרא **"לא קשיר לחלוטין"** ($totally\ disconnected$) אם $[x] = \{x\}$ לכל $x \in X$ (**רק** נקודון תת קבוצה קשירה).

דוגמאות:

1) מרחבים דיסקרטיים.

2) $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (3

$(\mathbb{Z}, d_p)$ * (4

(רמז: לכל $a \in (\mathbb{Z}, d_p)$ ו $b \neq a$ קיימת סביבה סגוחה $U \in N(a)$ כך ש $b \notin U$)

<u>הגדרה</u>: (מרכיב קשירות מסילתי): לכל מ"ט X ונקודה $x \in X$ מרכיב קשירות $[\mathrm{x}]_p$

של x מוגדר כמחלקת שקילות של x לגבי יחס שקילות הבא:

$$y \equiv_P x \overset{def}{=} \text{קיימת ב}X\text{מסילה מ } x \text{ ל } y$$

טענה: $\equiv_P$ יחס שקילות.

הסבר:

1) $x \equiv_P x$. ניקח מסילה קבועה.

2) $y \equiv_P x \Leftarrow x \equiv_P y$. עבור מסילה $f: [0,1] \to X$

נגדיר "מסילה הפוכה" $f^*(t) = f(1-t) \quad f^*: [0,1] \to X$

3) $x \equiv_P z \Leftarrow \begin{cases} x \equiv_P y \\ y \equiv_P z \end{cases}$

עבור $\begin{cases} f_1(0) = x, f_1(1) = y \\ f_2(0) = y, f_2(1) = z \end{cases}$ נגדיר $f_3: [0,1] \to X$ כך ש $f_3(t) = \begin{cases} f_1(2t), \ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ f_2(2t-1), \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$

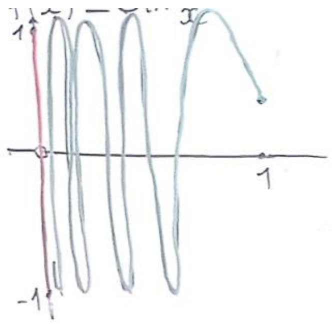
$$f_3(0) = x, f_3(1) = z$$

ונקבל ש f_3 רציפה מהתרגיל הבא (שהיה בתרגול):

תרגיל: נניח $X = Y_1 \cup Y_2$, Y_1, Y_2 סגורות.

נתונה פונקציה $X \xrightarrow{f} Z$ כך ש הצמצומים $f|_{Y_1}: Y_1 \to Z$, $f|_{Y_2}: Y_2 \to Z$ רציפות.

אז f רציפה (* תנו דוגמה נגדית אם אין סגירות!).



<u>הערה</u>: $PConn \neq Conn$

נגדיר פונקציה $[-1,1] \xrightarrow{f} (0,1]$, $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

נגדיר $X \coloneqq (\{0\} \times [-1,1]) \cup Gr(f)$ "Sine curve"

$$(0,1] \simeq Gr(f) \coloneqq \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 < x \le 1\right\}$$

כעת, $Gr(f)\simeq(0,1]$ קשיר ו $Gr(f)$ צפוף ב X (כלומר $\overline{Gr(f)}=X$), לכן (לפי התרגיל הנ"ל) $X\in Conn$. ז"א יש מרכיב קשירות 1.

אבל אין מסילה מנקודה "אדומה" (על הקטע) לנקודה "ירוקה" (ראו ספר האוניברסיטה הפתוחה, טופולוגיה קבוצתית).

יש 2 מרכיבי קשירות מסילתיים ולכן X לא קשיר מסילתית, כלומר $X\notin PConn$.

<u>תרגיל</u>: **(לעתיד)** לכל פונקציה רציפה $X\xrightarrow{f}Y$ מתקיים ש

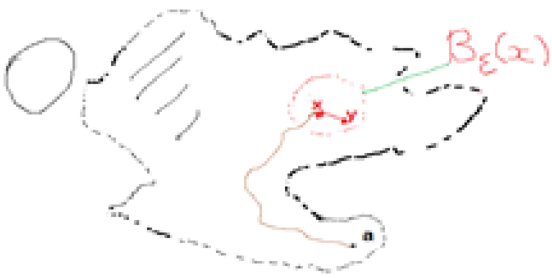
$X\simeq\underbrace{Gr(f):=\{(x,f(x))|x\in X\}}_{\text{תת מרחב טופולוגי}}\subset X\times Y$.

בהמשך נלמד מכפלה טופולוגית (באופן כללי).

<u>משפט</u>: כל קבוצה <u>קשירה ופתוחה</u> O במרחב <u>נורמי</u> E היא קשירה מסילתית.

<u>הוכחה</u>: נבחר $a\in O$ ונסמן $a\in \mathrm{A}:=[a]_p$ מרכיב קשירות מסילתית של a במרחב O.
אז A פתוחה ב O. כי אם $\mathrm{x}\in\mathrm{A}$ אז $\mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x})\subseteq O$ עבור ε מספיק קטן. $\mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x})$ קמור לכן קיימת מסילה לינארית ב $\mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x})$ מ x לכל $y\in\mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x})$. אז גם קיימת מסילה (לא בהכרח לינארית) במרחב O מנקודה a ל y (טרנזיטיביות). לכן $\mathrm{B}_\varepsilon(\mathrm{x})\subseteq A$.

באופן דומה אפשר להוכיח שגם המשלים $O\setminus A$ פתוח ב O. אבל אז $O\setminus A$ קבוצה ריקה כי אחרת נקבל ש O פריק. לכן $\mathrm{O}=\mathrm{A}=[a]_p$ ואז O קשיר מסילתית (מרכיב 1).



<u>הגדרה</u>: X נקרא **קשיר מקומית** בנקודה $a\in X$ אם לכל סביבה $U\in N(a)$ קיימת סביבה $U\supseteq V\in N(a)$ כך ש V קשיר. אומרים: *קשיר מקומית* אם זה מתקיים בכל נקודה.

<u>תרגיל:</u>

א. הוכיחו שכל תת קבוצה פתוחה במרחב נורמי היא קשירה מקומית (ולא תמיד קשירה).

ב. * תנו דוגמה של תת מרחב ב $\mathbb{R}^2$ שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית.

הומיאומורפיזמים המשך:

- $[3,8] \ncong [0,1] \cup [3,6]$

כי הראשון קשיר והשני לא קשיר.

__הגדרה__: נקודה $a \in X$ במ"ט X נקראת **__מחלקת__** אם: X קשיר אבל $X \setminus \{a\}$ לא קשיר.

למשל: בעקומה הבאה נקודות אדומות הן נקודות מחלקות

הערה: קיום של נקודה לא מחלקת זאת **תכונה טופולוגית** (נשמרת ע"י הומיאומורפיזם).

__טענה:__ אם $X \xrightarrow{f} Y$ המיאומו' אז לכל נק' מחלקת $p \in X$ גם $f(p) \in Y$ נק' מחלקת.

$\underbrace{X/\{p\}}_{\substack{\text{פריק} \\ \text{ז"א לא קשיר}}} \xrightarrow{f_*} \underbrace{Y/\{f(p)\}}_{\text{שגם פריק}}$ גם הומיאומורפיזם.

הסבר: שימוש (פעמיים) בתורשתיות של הרציפות.

- $[0,1) \ncong (2,5)$ $\quad$ $(0,1) \ncong [2,3]$

ב - $(2,5)$ כל נקודה היא "נקודה מחלקת" ($(2,5)/\{c\} \notin Conn$). אבל ב - $[0,1)$ יש נק' שלא מחלקת, זאת נק' 0. $\quad [0,1)/\{0\} \in Conn$

תכונה חשובה: הומיאומורפיזם שומר על נקודות מחלקות.

כנ"ל: מספר נקודות מחלקות, מספר נקודות לא מחלקות. כנ"ל מספר *מרכיבי קשירות* .

- הוכיחו ש - $8 \ncong 0$ (שניהם קומפקטיים, קשירים...)
- למיין עד כדי הומיאומורפיזמים:

א) את כל "הספרות"

1234567890

ב) האלף-בית האנגלי

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

(עבור sans serif font "ללא קישוטים, ללא עובי" אותיות וגם הספרות)

<u>תרגיל</u>: הוכיחו שכל הכדורים ב $(\mathbb{Z},d_p)$ הם הומיאומורפיים.

הערה: כל פונקציה לינארית בין מרחבים אוקלידיים

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \longmapsto A_f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

היא רציפה (ליפשיץ – $k = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$), כאשר A_f מטריצה של f

$$\Downarrow$$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ לינארית הפיכה ($\det(A_f) \neq 0$). אזי f הומיאומורפיזם.

הרצאה 8

<u>הגדרה</u>: (**אוטומורפיזמים**)

- ***חבורת המיואומורפיזמים*** של מ"ט

$X \in TOP$, $Homeo(X) \coloneqq \left\{X \xrightarrow{f} X \text{ הומיאומורפיזמים}\right\}$ חבורה לגבי ההרכבה

- ***חבורת איזומטריות*** של מ"מ

$X = (X,d) \in Metr$, $Iso(X) \coloneqq \left\{(X,d) \to (X,d) \text{ איזומטריות}\right\}$

שימו לב: אם $\tau = top(d)$ אז $\mathrm{Iso}(X,d)$ תת חבורה של $\mathrm{Homeo}(X,\tau)$.

$$Iso(X) \leq Homeo(X) \underbrace{\leq}_{\text{ת"ח}} \underbrace{(S_X,\circ)}_{\text{חבורה סימטרית}}$$

<u>הגדרה:</u> נגדיר פעולה טבעית $\quad Homeo(X) \times X \to X \quad (f,x) \longmapsto f(x)$

מחלקות שקילות $[x] = \{\mathrm{f(x)} \in X \mid \mathrm{f} \in \mathrm{Homeo(X)}\}$ אורביטה (מסלול) של x.

<u>הגדרה:</u> אומרים ש X הוא **מ"ט הומוגני** $(homogeneous)$ אם יש רק מסלול 1.

שקול: $\quad \forall\, x,y \in X\, , \exists f \in Homeo(X) : f(x) = y$

זאת תכונה טופולוגית. זאת אומרת נשמרת ע"י הומיאומורפיזמים.

<u>דוגמה:</u> כל מ"ט דיסקרטי הוא הומוגני. כאן $Homeo(X,\tau_{discr}) = S_X$?

<u>דוגמה:</u> $X = (0,2)$ מ"ט הומוגני.

אחד מההסברים: $(0,2) \simeq \mathbb{R}$ ו $\mathbb{R}$ הומוגני.

<u>דוגמה:</u> אם $X = [0,1) \cup \{3\}$. אז לא הומוגני. יש 3 מסלולים הבאים:

$$[3] = \{3\}, \quad [0] = \{0\}, \quad [\tfrac{1}{2}] = (0,1)$$

<u>הגדרה:</u> באופן דומה מגדירים מ"מ (X,d) הומוגני

(אם לפעולה $Iso(X) \times X \to X$ יש מסלול אחד).

<u>דוגמה:</u> $\mathbb{R}^n$, מרחב נורמי, S_n, $(\mathbb{Z}, d_p)$ מ"מ הומוגניים (לכן גם הומוגני כמ"ט).

דוגמה: $X = (-1,1)$ אז הוא הומוגני כמרחב טופולוגי אבל לא כמ"מ

(שימו לב: כאן $Iso(X)$ בעל שני איברים בלבד: פונקצית זהות ושיקוף).

<u>תרגיל:</u> כמה מסלולים קיימים בפעולה של $Homeo(x)$ על X אם:

א) $X = (3,\infty)$

ב) $X = [0,1]$

ג) $X = 8$

ד) $X=(0,1)\cup(2,4)\cup\{7\}$.

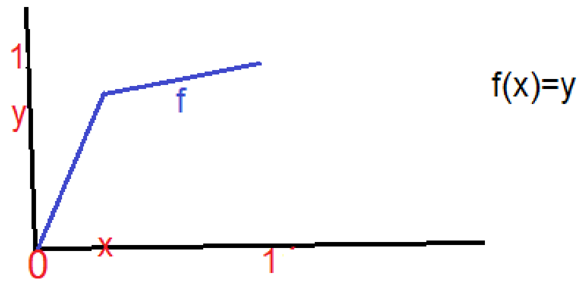
תשובה:

א) מסלול 1 (הומגניות!). $\mathbb{R}\simeq(3,\infty)$ ו - $\mathbb{R}$ הומוגני (הזזות).

ב) 2 מסלולים. $[0]=\{0,1\}=[1]$ $\left[\frac{1}{2}\right]=\{x|0<x<1\}$

רמז: לא קיים $h\in Homeo([0,1])$ כך ש $0<x<1$, $h(0)=x$.

כי x נק' מחלקת עבור $[0,1]$ ו- 0 לא.



$\forall 0<x<y<1 \quad \exists f\in Homeo([0,1]) \quad f(x)=y$

שיקוף $\exists f\in Homeo([0,1]) \quad f(0)=1$

ג) 2 מסלולים. מדוע ?

ד) 2 מסלולים. מדוע ?

בסיס לטופולוגיה

נגדיר סימונים חדשים. נניח $\gamma\subseteq P(X)$ (אוסף תת קבוצות ב X). נגדיר:

- $\gamma^{\cup}:=\{\cup\{B:B\in\beta\}\,|\,\beta\subseteq\gamma\}$ (כל מיני איחודים דרך איברים של γ)
- $\gamma^{\cap F}:=\{\cap\{B:B\in\beta\}\,|\,\beta\subseteq\gamma,\beta \text{ is finite}\}$ (חיתוכים סופיים דרך איברים של γ)

תמיד: $\gamma\subseteq\gamma^{\cap F}$ $\gamma\subseteq\gamma^{\cup}$ $\varnothing\in\gamma^{\cup}$ $\varnothing\in\gamma^{\cap F}$ (ניקח β קבוצה ריקה)

למשל אקסיומות טופולוגיה אפשר לכתוב כך:

(t_1) $\varnothing,X\in\tau$ (t_2) $\tau^{\cap F}=\tau$ (t_3) $\tau^{\cup}=\tau$.

הגדרה: (בסיס *basis*) יהי (X,τ) מ"ט. $\gamma \subseteq \tau$ נקרא **בסיס** (לטופולוגיה τ) אם כל קבוצה פתוחה (לא ריקה) שווה לאיחוד איברים מ – γ.

הערה: (הגדרה שקולה) התנאים הבאים שקולים:

1. γ בסיס לטופולוגיה τ.
2. $\gamma^{\cup} = \tau$.
3. $\gamma \subseteq \tau$ ולכל $O \in \tau$ ולכל $a \in O$ קיים $G_a \in \gamma$ כך ש $a \in G_a \subseteq O$.

הגדרה: נניח (X,τ) מ"ט. $\alpha \subseteq \tau$ נקרא Pre-base פרה-בסיס

(אומרים גם תת-בסיס subbase)

אם $\alpha^{\cap F}$ הוא בסיס ל τ

שקול: $(\alpha^{\cap F})^{\cup} = \tau$

הגדרה: אומרים ש - (X,τ) **בעל תכונת מנייה שנייה** $(second\ countable)$ ונסמן:

$(X,\tau) \in B_2$

אם קיים **בסיס** γ **בן מנייה.**

דוגמאות של בסיס טופולוגי: (תשתמשו בהגדרה (3))

- ב $X = \mathbb{R}$ $\gamma_1 = \{(a,b) \mid a < b\}$ וגם $\gamma_2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$ בסיסים.
  $\gamma_3 = \{(a,\infty),(-\infty,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ **פרה-בסיס** אבל לא בסיס.
- ב $X = \mathbb{R}^2$
  א. γ_0={עיגולים פתוחים}
  ב. $\gamma_1 = \{(a,b)\times(\mathrm{c},\mathrm{d})\}$={"מלבנים" פתוחים}
  ג. γ_2={ריבועים פתוחים} γ_3={משולשים פתוחים}
  ד. γ_4={עיגולים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות"}
  ה. γ_5={משולשים פתוחים שווה צלעות}
- $\mathbb{R}^n \in B_2$

γ_4={כדורים פתוחים עם מרכזים בנקודות "רציונליות" ורדיוסים $\frac{1}{k}$} בן מניה !

- ב $(\mathbb{R},\tau_s)$ (Sorgenfrey Line) כאשר בקבוצה $\mathbb{R}$ מוגדרת טופולוגיה הבאה

$$\tau_s := \{O\subseteq\mathbb{R} : x\in O \Rightarrow \exists\varepsilon>0\,[x,x+\varepsilon)\subseteq O\}$$

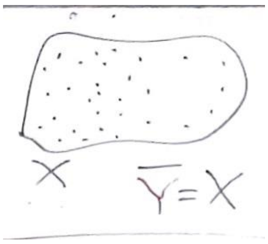
אז $\gamma=\{[a,b)\mid a<b\}$ בסיס. תבדקו שכל $[a,b)$ היא קבוצה **סגוחה** ב $(\mathbb{R},\tau_s)$.

- לכל (X,d) "כדורים פתוחים" בסיס לטופולוגיית $top(d)$.

א. $\gamma := \{B_r(a)\}_{\substack{a\in X\\ r>0}}$ $\quad\gamma^{\cup}=top(d)$ (ראו משפט: "כדורים בסיס").

ב. גם $\gamma_1 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{\substack{a\in X\\ n\in\mathbb{N}}}$ מהווה בסיס.

<u>**טענה**</u>: (תרגול) לכל (X,d) ולכל $\bar{Y}=X$ (כלומר Y צפוף בX) $\gamma_2 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{\substack{a\in Y\\ n\in\mathbb{N}}}$ מהווה בסיס ל $top(d)$.



<u>**תוצאה חשובה:**</u> אם מרחב מטרי (X,d) הוא ספרבילי אז הוא גם B_2.

$$(X,d)\in B_2 \Leftarrow (X,d)\in Sep$$

<u>**טענה**</u>: הוכיחו ש B_2 תכונה <u>תורשתית</u>.

רמז: תבדקו שאם γ בסיס ל (X,τ) ו $Z\subseteq X$ תת קבוצה אז $\gamma_Z := \{G\cap Z\mid G\in\gamma\}$ בסיס לתת מרחב (Z,τ_Z).

<u>**טענה**</u>: לכל מרחב דיסקרטי (X,τ_{discr}) אוסף כל הנקודונים $\gamma_0=\{\{x\}\mid x\in X\}$ הוא בסיס ל (X,τ_{discr}). לכל בסיס אחר γ מתקיים $\gamma_0\subseteq\gamma$.

הסיקו: $|X|\le\aleph_0 \Leftrightarrow (X,\tau_{discr})\in B_2$.

למשל: $(\mathbb{R},\tau_{discr})\notin B_2$.

<u>**משפט**</u>: $B_2\subset Sep$.

<u>הוכחה</u>: נניח γ בסיס בן מנייה במ"ט (X,τ). צריך למצוא תת קבוצה צפופה בת מניה.

בה"כ $\varnothing \notin \gamma$. לכל $G \in \gamma$ נבחר נקודה אחת בלבד $y_G \in G$. נגדיר $Y_\gamma := \{y_G \mid G \in \gamma\}$
אז Y_γ בת מניה (כי γ ב"מ) ו Y_γ צפופה ב X . אכן נוכיח $cl(Y_\gamma) = X$.

לכל $O \in \tau$ ולכל $a \in O$ קיים $G_a \in \gamma$ כך ש $a \in G_a \subseteq O$. לפי הבנייה קיים $y_G \in G_a$
לכן $y_G \in Y_\gamma \cap O \neq \varnothing$.

זה מוכיח שכל נקודה $a \in X$ שייכת לסגור של Y_γ . ז"א $cl(Y_\gamma) = X$.

☺

<u>תוצאה 1</u>: $\boxed{B_2 \cap Metriz = Sep \cap Metriz}$..

<u>תוצאה 2</u>: במרחבים מטריזביליים – ספרביליות כן תורשתית.

הסבר: כי B_2 תורשתית ...

<u>טענה</u>: $l_\infty \notin Sep$ (קיים מרחב בנך לא ספרבילי).

הסבר: $(l_\infty, d_{sup}) \underset{\text{תת מרחב מטרי}}{\hookleftarrow} \underbrace{(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d_\Delta)}_{\text{סדרות בינאריות}}$ לא ספרבילי

(מרחב דיסקרטי ספרבילי אם"ם הוא בן מניה)

<u>הערה</u> 1: $B_2 \neq Sep$.

קו סורגנפרי מקיים: $(\mathbb{R}, \tau_s) \in Sep, \quad (\mathbb{R}, \tau_s) \notin B_2$.

<u>הערה</u> 2: ספרביליות לא תורשתית (גם בבמרחבים יחסית טובים).

למשל: * "מישור סורגנפרי" $(\mathbb{R}, \tau_s)^2 \in Sep$ אבל יש תת מרחב לא ספרבילי (נלמד).

<u>בסיס מקומי</u>

<u>הגדרה</u>: $\beta \subseteq N(a)$ נקרא **בסיס מקומי** בנקודה a, אם לכל $U \in N(a)$
קיים $V \in \beta$ כך ש $V \subseteq U$.

<u>הגדרה</u>: אומרים ש- (X, τ) **בעל תכונת מנייה ראשונה**, ונסמן: $(X, \tau) \in B_1$
אם לכל נקודה $a \in X$ קיים בסיס מקומי בן מנייה.

<u>דוגמה</u>: לכל (X, d) דוגמאות לבסיס מקומי בנקודה a

$\beta_1 := \{B_r(a)\}_{r>0}$

$\beta_2 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ בן מנייה ! $\beta_3 := \{B[a,\frac{1}{n}]: n \in \mathbb{N}\}$

<u>תוצאה</u>: $Metriz \subset B_1$

<u>דוגמה:</u> $(X,\tau_{discr}) \in \mathrm{B}_1$.

הסבר נוסף : לכל $a \in (X,\tau)$ היא נקודה מבודדת אם"ם נקודון $\alpha := \{a\}$ הוא בסיס מקומי.

<u>טענה</u>: נניח X קבוצה ו γ אוסף תת קבוצות ב X. התנאים הבאים שקולים:

1. γ בסיס לטופולוגיה מסוימת.
2. א. $X \in \gamma^{\cup}$

ב. חיתוך של 2 קבוצות מ γ אפשר להציג כאיחוד של קבוצות מ γ.

<u>הערה</u>: ב שקול ל ב* : $\forall A,B \in \gamma\ \forall x \in A\cap B\ \exists C \in \gamma \quad x \in C \subseteq A \cap B$

ב* שקול ל ב**: $\gamma^{\cap_F} \subseteq \gamma^{\cup}$.

<u>הוכחה</u>: נגדיר אוסף $\tau := \gamma^{\cup}$. מ"ל τ טופולוגיה.

$(t_1) \quad \varnothing, X \in \tau$

הסבר: $X \in \tau$. בגלל תנאי א. תנאי $\varnothing \in \tau$ נובע מהתכונה הנ"ל על $\gamma^{\cup}$.

$(t_2) \quad \tau^{\cap_F} = \tau$

הסבר: $\tau^{\cap_F} = (\gamma^{\cup})^{\cap_F} = (\gamma^{\cap_F})^{\cup} \subseteq (\gamma^{\cup})^{\cup} = \gamma^{\cup} = \tau$.

$(t_3) \quad \tau^{\cup} = \tau$

הסבר: $\tau^{\cup} = (\gamma^{\cup})^{\cup} = \gamma^{\cup} = \tau$.

☺

הערה: מקרה פרטי חשוב לתנאי ב בטענה הוא "סגירות לגבי חיתוכים סופיים" ($\gamma^{\cap_F} = \gamma$)

נשתמש בנושא של מכפלות טופולוגיות.

דוגמה: $\gamma := \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$

$$[a_1,b_1)\cap[a_2,b_2)=[a_3,b_3) \quad a_3:=\max\{a_1,a_2\},\, b_3:=\min\{b_1,b_2\}$$

לכן $\gamma^{\cap_F}=\gamma$.

תזכורת:

<u>הגדרה:</u> $\beta\subseteq N(a)$ נקרא **בסיס מקומי** בנקודה a, אם לכל $U\in N(a)$ קיים $V\in\beta$ כך ש $V\subseteq U$.

<u>הגדרה:</u> אומרים ש- (X,τ) **בעל תכונת מנייה ראשונה**, ונסמן: $(X,\tau)\in B_1$ אם לכל נקודה $a\in X$ קיים בסיס מקומי בן מנייה.

<u>דוגמה:</u> לכל (X,d) דוגמאות לבסיס מקומי בנקודה – a

$\beta_1 := \{B_r(a)\}_{r>0}$

$\beta_2 := \left\{B_{\frac{1}{n}}(a)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ בן מנייה ! $\quad \beta_3:=\{B[a,\tfrac{1}{n}]:n\in\mathbb{N}\}$

<u>תוצאה:</u> $Metriz\subset B_1$

<u>דוגמה:</u> $(X,\tau_{discr})\in \mathrm{B}_1$.

הסבר: לכל $a\in(X,\tau)$ היא נקודה מבודדת אם"ם נקודון $\alpha:=\{a\}$ הוא בסיס מקומי.

<u>הערה:</u>

- מספיק לבדוק רציפות פונקציה דרך בסיס.
- מספיק לבדוק רציפות בנקודה עבור סביבות מבסיס מקומי.
- מספיק לבדוק התכנסות סדרות עבור סביבות מבסיס מקומי

<u>תרגיל:</u> B_1 תכונה תורשתית.

<u>טענה:</u> $B_2\subset B_1$

הסבר: נניח γ בסיס בן מנייה במ"ט (X,τ). לכל $a\in X$ נגדיר $\gamma_a:=\{A\in\gamma \mid a\in A\}$.

אז γ_a בסיס מקומי בנקודה a.

<u>דוגמה:</u> $B_2\neq B_1$ $\qquad \begin{cases}(\mathbb{R},\tau_{discr})\in B_1\\ (\mathbb{R},\tau_{discr})\notin B_2\end{cases}$

הערה: $Discrete \subset Metriz \subset B_1$

$Metriz \cap Sep \subset B_2 \subset B_1$

הגדרה: $\mathbf{dim}(X) = \mathbf{0} \overset{def}{=}$ קיים בסיס γ לטופולוגיה כך שכל $A \in \gamma$ קבוצה סגוחה .

הגדרה כללית: $\boldsymbol{Menger\text{–}Urysohn}$ (ראו גם עבודת סמינר לסטודנטים)

עבור מרחבים עם $X \in T_3$ מגדירים:

- $\dim(\varnothing) = -1$
- $\dim X \le 1$ אם קיים בסיס γ כך ש $\dim \partial(A) \le 0 \quad \forall A \in \gamma$.
- $\dim X \le n+1$ אם קיים בסיס γ כך ש $\dim \partial(A) \le n \quad \forall A \in \gamma$.

הערה: מסמנים יותר ב $ind\, X$ (*inductive dimension*).

דוגמאות: $\dim \mathbb{R}^n = \dim S_n = n$ ....

משפט: אם $X \in T_1$ וגם $\dim(X) = 0$ אז - $X \in T_{3\frac{1}{2}}$.

הוכחה: נניח $a \in X, a \notin B, cl(B) = B$.

על מנת לבדוק $X \in T_{3.5}$ צ"ל קיימת הפרדה פונקציונלית של a ו B.

$a \in B^c \in \tau$. לכן לפי הגדרת מימד אפס (ושל בסיס) קיימת קבוצה סגוחה O כך ש
$a \in O \subseteq B^c$

$O \subset X$ קב' סגוחה אזי $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in O \\ 1, & x \notin O \end{cases}$

רציפה! (4 מקרים .... ראינו הוכחה דומה).

ברור שהפונקציה מפרידה a ו B.

☺

טענה: אם $\dim X = 0, X \in T_1$ אז X בלתי קשיר לחלוטין.

הוכחה: תשתמשו ברעיון של המשפט הקודם. לכל תת קבוצה $A \subseteq X$ ששונה מנקודון קיימת פונקציה רציפה $f : A \to \{0,1\}$ **על**. לכן A לא קשירה.

☺

דוגמאות:

א. $\dim(X, \tau_{discr}) = 0$

τ_{discr} בסיס לעצמו ומוכב מקבוצות סגוחות.

ב. $\dim(\mathbb{Q}) = 0$.

$\gamma \coloneqq \{(a,b) \cap \mathbb{Q} | a,b \in \mathbb{Q}^c\}$ בסיס שמורכב מקבוצות סגוחות.

ג. $\dim(\mathbb{Z}, d_p) = 0$.

כל כדור הוא סגוח ב $(\mathbb{Z}, d_p)$ (בעצם גם בכל מרחב אולטרהמטרי)

ד. $\dim(\mathbb{R}, \tau_S) = 0$ Sorgenfrey line

תזכורת: $O \in \tau_S \overset{def}{=} x \in O \Rightarrow \exists\, \epsilon = \epsilon_x > 0 \colon [x, x+\epsilon_x) \subset O$.

תכונות קו סורגנפריי: $(\mathbb{R}, \tau_s)$ $\tau_s \coloneqq \{O \subseteq \mathbb{R} : x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon > 0\, [x, x+\varepsilon) \subseteq O\}$

- $(\mathbb{R}, \tau_s) \in T_2$

$\gamma \coloneqq \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ בסיס ($\gamma^{\cup} = \tau_s$) $O = \bigcup_{x \in O} [x, x+\epsilon_x)$.

- א. $\tau \neq \tau_s$ ב. $\tau \subset \tau_s$.

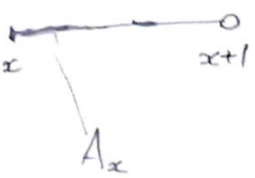
$(a,b) = \cup \{[x, x+\varepsilon_x) \mid x \in (a,b)\} \in \tau_s$

- $(\mathbb{R}, \tau_s) \in B_1$ $\{[a, a+\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\} \subset N_{\tau_S}(a)$ בסיס מקומיבן מניה
- $(\mathbb{R}, \tau_s) \in Sep$ $cl_{\tau_s}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$
- **טענה**: $(\mathbb{R}, \tau_s) \notin B_2$

הוכחה: נניח בשלילה שקיים בסיס $\gamma \subset \tau_S$ כך ש γ בן מנייה.

$[x, x+1) \in \tau_S$ פתוחה, לכן הוא שווה לאיחוד איברים מבסיס γ.

אז קיים $A_x \in \gamma$ כך ש - $x \in A_x \subset [x, x+1)$.



נבחר A_x כזה ונגדיר העתקה $x \longmapsto A_x$ $\mathbb{R} \overset{\varphi}{\to} \gamma$

φ חח"ע ($x \neq y \Rightarrow A_x \neq A_y$).

$$2^{\aleph_0} = \aleph = |\mathbb{R}| = |\varphi(\mathbb{R})| \leq |\gamma|$$

מכאן $|\gamma| \geq 2^{\aleph_0} > \aleph_0$, לכן γ לא בת מנייה!

- $(\mathbb{R},\tau_s) \notin Metriz$ (כי הוא ספרבילי ללא B_2)
- $\dim(\mathbb{R},\tau_s) = 0$. בסיס γ מורכב מקבוצות סגוחות. $\Leftarrow$
- $(\mathbb{R},\tau_s) \in T_{3\frac{1}{2}}$ (נובע מהתכונה הקודמת והמשפט שהוכחנן).

קשר בין עקרון *Heine* ותכונת B_1

__הגדרה:__ אומרים שמ"ט X הוא בעל **תכונת FU** $(Frechet - Urysohn)$ אם:

$$\forall\, A \subseteq X:\ \ scl(A) = cl(A)$$

__הערה:__ $Metriz \subset B_1 \subset FU$

__הערה:__ למדנו דוגמה של מ"ט שהוא לא *FU*.

__טענה:__ $B_1 \subseteq FU$.

הוכחה מקוצרת: שימו לב שאם $X \in B_1$ אז לכל נקודה יש בסיס מקומי בן מנייה

$\alpha = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ __מונוטוני__ (ז"א $U_{n+1} \subseteq U_n$). אפשר "לתקן כל בסיב מקומי בן מנייה (חיתוכים סופיים רקורסיסית) לקבלת בסיס מקומי מונוטוני.

ואז ההמשך דומה למקרה של מ"מ ...

הרצאה 9

__משפט__ **(עיקרון *Heine* מתוקן):** נניח $(X,\tau) \xrightarrow{f} (Y,\sigma)$ פו' בין מ"ט. נניח ש - $(X,\tau) \in FU$ (למשל: $(X,\tau) \in B_1$) אין הגבלה על Y. אז התנאים הבאים שקולים:

(1) f רציפה.

(2) f שומרת על התכנסות (ז"א $f(scl(A)) \subseteq scl(f(A))$).

__הוכחה:__ $(1) \Rightarrow (2)$: תמיד (ממשפט $\frac{1}{2}$ *Heine*).

$(2) \Rightarrow (1)$:

$$f(cl(A)) \underbrace{=}_{X\in FU} f(scl(A)) \underbrace{\subseteq}_{\text{נתון}} scl(f(A)) \underbrace{\subseteq}_{\text{תמיד מתקיים}} cl(f(A))$$

☺

תוצאה: עיקרון $Heine$ נכון עבור קו $Sorgenfrey$ $(\mathbb{R},\tau_s)\xrightarrow{f}(Y,\sigma)$ (כתחום הפונקציה) כי $(\mathbb{R},\tau_s)\in B_1\subset FU$.

הערה: בטופולוגיה, באנליזה ... יש צורך אמיתי ב"סדרות מוכללות":

$(M,\preccurlyeq)$ קבוצה סדורה חלקית **מכוונת** (לכל $\forall a,b\in M\ \exists c\in M\ \ a\le c,b\le c$).

סדרה מוכללת או רשת (generalized sequence or net) היא פונקציה $(M,\preccurlyeq)\xrightarrow{f}X$ (סדרה רגילה: $(\mathbb{N},\le)\xrightarrow{f}X$).

דוגמה חשובה: כל בסיס מקומי β (לנקודה a) דוגמה לקבוצה סדורה מכוונת.

אם לכל $V\in\beta$ נבחר באיבר $x_V\in V$ אז נקבל $\lim\{x_V:V\in\beta\}=a$.

דרך רשתות אפשר לתת תיאור של $cl(A)$.

$z\in cl(A)\Leftrightarrow z$ גבול של סדרה מוכללת

ואז יש הכללת עיקרון $Heine$ ...

שימו לב: למשל **אינטגרלים** זה סוג של גבול (אבל לא גבול רגיל !)

דרך סדרות מוכללות מסוימות.

ספר מומלץ: ד. ליבוביץ, טופולוגיה קבוצתית, האוניברסיטה הפתוחה.

תזכורת:

הגדרה: נניח (X,τ) מ"ט. $\alpha\subseteq\tau$ נקרא פרה-בסיס (אומרים גם תת-בסיס) אם

$\alpha^{\cap F}$ הוא בסיס ל τ **שקול:** $(\alpha^{\cap F})^{\cup}=\tau$

דוגמאות:

1) כל בסיס הוא פרה-בסיס.

2) א) $X=\mathbb{R}$ $\alpha:=\{(-\infty,b),(a,\infty)\}$. $a,b\in\mathbb{R}$ (או $a,b\in\mathbb{Q}$).

α פרה– בסיס אבל לא בסיס! $\underbrace{\gamma=\{(a,b)\}}_{\text{בסיס ל}-\mathbb{R}}\subset\alpha^{\cap_2}\subset\alpha^{\cap F}$

הגדרה: לכל קבוצה **סדורה ליניארית** $(X,\le)$ אפשר להגדיר

$\tau_{\leq}$ "interval topology"

עם פרה-בסיס $\alpha := \{(-\infty, b), (a, \infty) \mid a, b \in X\}$ $\tau_{\leq} = (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

ב) $X = \mathbb{R}^2$. $\alpha = \{(a,b) \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times (c,d)\}$

כאשר $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ (או $a,b,c,d \in \mathbb{Q}$) הוא פרא-בסיס.

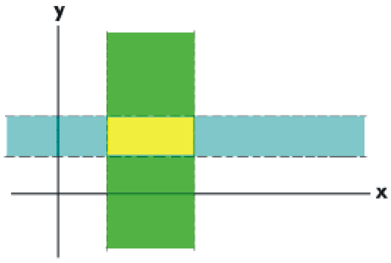


Fig. 2

טענה: נניח $X, Y \in TOP$ ונתונה פונקציה $f: X \to Y$.

$\alpha \subset \tau_Y$ פרה-בסיס. אז התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה.
2. $\forall U \in \alpha: f^{-1}(U) \in \tau_X$.

הסבר:

<u>$(1) \Leftarrow (2)$:</u> בגלל קריטריון 2 של הרציפות.

<u>$(2) \Leftarrow (1)$:</u> צ"ל $\forall O \in \tau_Y: f^{-1}(O) \in \tau_X$.

מצד שני, α תת בסיס ל τ_Y, לכן $O \in \tau_Y = (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

$f^{-1}(O) \in \tau_X$ כי ה"מקור" שומר על $\cap_F$ וגם על $\cup$.

■

תוצאה: התנאים הבאים שקולים :

1. $f: X \to \mathbb{R}$ רציפה.
2. $f^{-1}(-\infty, b), f^{-1}(a, \infty)$ פתוחות לכל $a, b \in \mathbb{Q}$ (או $a, b \in \mathbb{R}$).

הסבר: דוגמה 2א + הטענה.

■

טענה: נניח $\alpha \subset P(X)$ כך ש α כיסוי ל X. אז α הוא פרא-בסיס לטופולוגיה $\tau := (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$.

הסבר:

(t_1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \alpha^{\cup}$ (כי נתון ש – α כיסוי).

$$\tau^{\cap_F} = ((\alpha^{\cap_F})^{\cup})^{\cap_F} = ((\alpha^{\cup})^{\cap_F})^{\cap_F} = (\alpha^{\cup})^{\cap_F} = (\alpha^{\cap_F})^{\cup} = \tau \quad (t_2)$$

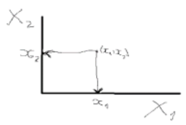
$$.\tau^{\cup} = ((\alpha^{\cap_F})^{\cup})^{\cup} = (\alpha^{\cap_F})^{\cup} = \tau \quad (t_3)$$

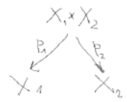
■

<u>מכפלה טופולוגית (מס' סופי של הגורמים)</u>

(X_1,τ_1), (X_2,τ_2) מ"ט. איך מגדירים "טופולוגיה טבעית" על

$$X = X_1 \times X_2 = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\} = \prod_{i\in\{1,2\}} X_i \qquad (X_1 \times X_2, \tau_\Pi = ?)$$





כללי יותר: $\tau_\Pi = ?$ על $X = X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1,\cdots,x_n) \mid x_i \in X_i\} = \prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i$

<u>רעיון:</u> מגדירים <u>טופולוגית מכפלה</u> כטופולוגיה הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של **<u>הטלות</u>**

$$p_k : \prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i \to X_k \qquad p_k(x_1,\cdots,x_n) = x_k$$

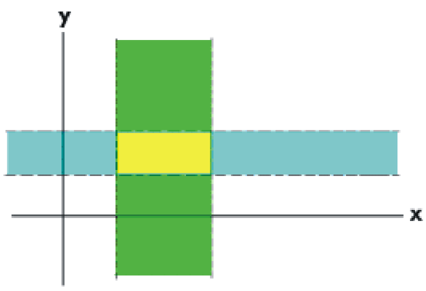


Fig. 2

$$\{(x_1,x_2) \in X_1 \times X_2 | x_1 \in O_1\} = p_1^{-1}(O_1) = O_1 \times X_2$$

$$p_2^{-1}(O_2) = X_1 \times O_2$$

$$(O_1 \times X_2) \cap (X_1 \times O_2) = p_1^{-1}(O_1) \cap p_2^{-1}(O_2) = \underbrace{O_1 \times O_2}_{\text{"מלבן פתוח"}}$$

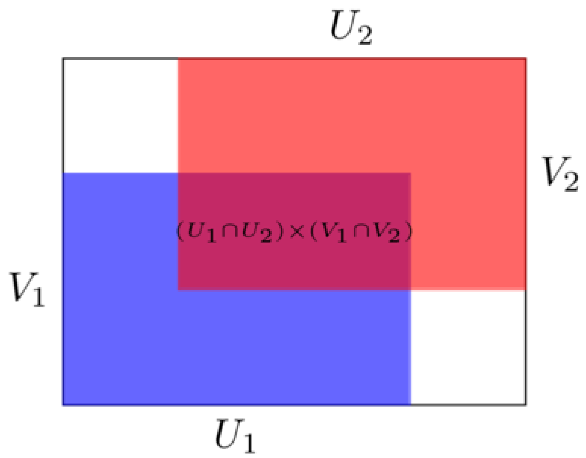
$O_1 \times X_2$, $X_1 \times O_2$ חייבים להיות מתוך טופולוגיה τ_π על $X_1 \times X_2$ על מנת להבטיח את הרציפות.

אז גם חיתוך (סופי) $O_1 \times O_2 \in \tau_\pi$.

<u>הגדרה:</u> $\gamma := \{O_1 \times \cdots \times O_n \mid O_i \in \tau_i\}$ "תיבות בסיסיות"

("מלבנים פתוחים" $\gamma := \{O_1 \times O_2 \mid O_1 \in \tau_1, O_2 \in \tau_2\}$ במקרה של $n = 2$)

מקיים את התנאים: $\gamma^{\cap_F} = \gamma, X \in \gamma$



$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

לכן (לפי הטענה) γ בסיס לטופולוגיה מסוימת $\gamma^{\cup}$. נגדיר

$$\tau_\Pi = \gamma^{\cup}$$

שקול: $O \in \tau_\Pi \Leftrightarrow (x_1, \cdots, x_n) \in O \Rightarrow \exists O_i \in \mathrm{N}(x_i) \quad O_1 \times \cdots \times O_n \subseteq O$

<u>משפט:</u> $X = (\prod_{i \in \{1, \cdots, n\}} X_i, \tau_\Pi)$ מ"ט ו τ_Π הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

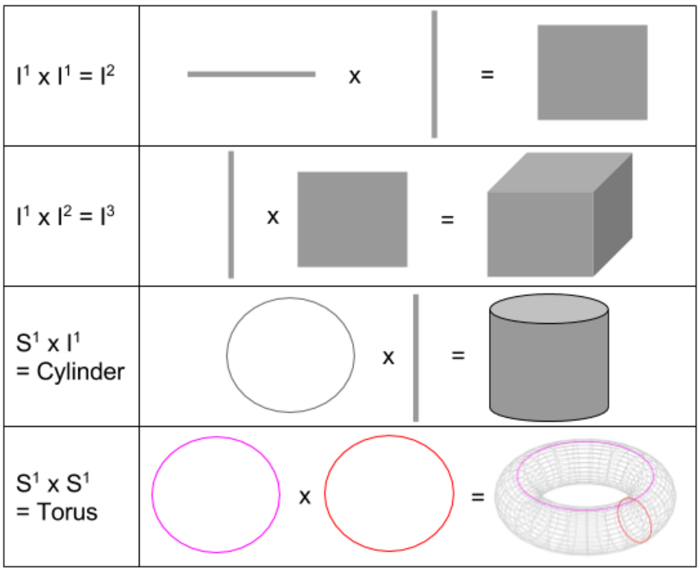
$$\mathrm{p}_i : (\prod_{i \in \{1, \cdots, n\}} \mathrm{X}_i, \tau_\Pi) \to (\mathrm{X}_i, \tau_i) \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i$$

בסיס סטנדרטי $\gamma := \{O_1 \times \cdots \times O_n \mid O_i \in \tau_i\}$ "תיבות בסיסיות". $\tau_\Pi = \gamma^{\cup}$.

פרה-בסיס סטנדרטי $\alpha := \{\mathrm{p}_i^{-1}(O_i) = \mathrm{X}_1 \times \cdots \times O_i \times \cdots \times X_n \mid O_i \in \tau_i\}$ "תיבות אלמנטריות"

אז

$$\alpha^{\cap_F} = \gamma \quad \tau_\Pi = (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$$



טורוס *n*-ממדי $S_1^n = S_1 \times \cdots \times S_1 \simeq T^n$

הוא בעל מימד *n* קומפקטי (לכן לא הומיאומורפי ל $\mathbb{R}^n$) אבל לכל נקודה יש סביבה שהומיאומורפית ל $\mathbb{R}^n$ (ז"א T^n **<u>לוקלית</u>** הומיאומורפי ל $\mathbb{R}^n$).

מ"ל עבור $n=1$ (מדוע ?)

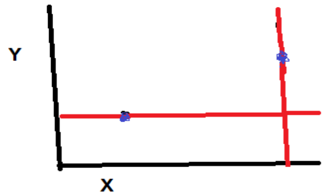
מספר תכונות:

- אם γ_1 בסיס של X_1 ו γ_2 בסיס של X_2 אז $\gamma_1 \times \gamma_2 := \{O_1 \times O_2 : O_1 \in \gamma_1, O_2 \in \gamma_2\}$ בסיס של $X_1 \times X_2$.
- אם α_1 בסיס לוקלי של X_1 בנקודה x_1 ו α_2 בסיס לוקלי של X_2 בנקודה x_2 אז $\alpha_1 \times \alpha_2 := \{U_1 \times U_2 : U_1 \in \alpha_1, U_2 \in \alpha_2\}$ בסיס לוקלי של $X_1 \times X_2$ בנקודה (x_1, x_2).
- אם A_1 צפוף ב X_1 ו A_2 צפוף ב X_2 אז $A_1 \times A_2$ צפוף ב $X_1 \times X_2$.
- $\{a\} \times X_2 \simeq X_2 \quad X_1 \times \{b\} \simeq X_1 \quad \forall a \in X_1, b \in X_2$

תרגילים מומלצים: (אם יהיה קשה [ראו כאן](selected exercises) selected exercises)

1. $X \times Y \in B_2 \Leftrightarrow X, Y \in B_2$
2. $X \times Y \in B_1 \Leftrightarrow X, Y \in B_1$
3. $X \times Y \in Sep \Leftrightarrow X, Y \in Sep$

4. $X\times Y\in Conn \Leftrightarrow X,Y\in Conn$
רמז דרך התמונה:



הערה: תכונה טופולוגית נקראת "כפלית סופית" אם היא נשמרת לגבי מכפלה טופולוגית סופית.

5. $X\in T_2 \Leftrightarrow \Delta:=\{(x,x):x\in X\}$ סגור במרחב מכפלה $X\times X$.
6. אם $Y\in T_2$ ו $f:X\to Y$ רציפה אז הגרף $Gr(f)$ סגור ב $X\times Y$.
שאלה: האם יש קשר בין שני התרגילים הקודמים ?
7. לכל פונקציה רציפה $X\xrightarrow{f}Y$ מתקיים ש

$$X\simeq \underbrace{Gr(f):=\{(x,f(x))|x\in X\}}_{\text{תת מרחב טופולוגי}}\subset X\times Y.$$

8. * Sorgenfrey plane $X:=(\mathbb{R},\tau_s)\times(\mathbb{R},\tau_s)$ ספרבילי אבל מכיל תת מרחב לא ספרבילי.
9. $\mathbb{R}\setminus\{0\}\simeq\{1,2\}\times\mathbb{R}$
10. $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\simeq S_1\times\mathbb{R}$

טופולוגיה של סדר ליניארי

תזכורת: נניח $\le$ סדר ליניארי על קבוצה X ו $\tau_\le$ טופולוגית הסדר
(עם פרה-בסיס $\alpha:=\{(-\infty,b),(a,\infty):a,b\in X\}$. ז"א $((\alpha^{\cap_F})^{\cup}=\tau_\le$)

דוגמה: למשל טופולוגיה של $\mathbb{R}$ או $[0,1]$ (או בעצם כל קטעים ב $\mathbb{R}$).

אזהרה: טופולוגית תת מרחב במרחב סדור ליניארי לא תמיד שווה לטופולוגיה של סדר מצומצם. למשל: $X:=\mathbb{R}$ $Y:=[0,1)\cup\{2\}$.

תרגילים:

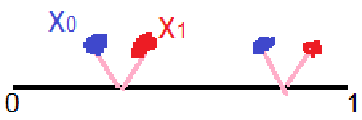
11. הוכיחו:
א. $(X,\tau_\le)\in T_2$
ב. יחס הסדר $\{(x,y)\in X\times X:x\le y\}$ סגור במרחב מכפלה $X\times X$.

ג. אם $\forall n\in\mathbb{N}\ x_n\le y_n,\ \lim_{n\to\infty}x_n=x,\ \lim_{n\to\infty}y_n=y$

אזי $x\le y$.

12. (**שאלת אתגר**) בקבוצה $X:=[0,1]\times\{0,1\}$ נגדיר Lexicographic Order

$$(a,b)\le_L(c,d)\Leftrightarrow a<c \quad or \quad a=c,b\le d$$



נדמיין "שהחלפנו" כל נקודה $x\in[0,1]$ בשתי נקודות x_0,x_1 עם הסדר $x_0<x_1$

(כאשר מסמנים $x_0:=(x,0),\ x_1:=(x,1)$)

הוכיחו:

א. $(X,\tau_{\le_L})\in Sep\cap B_1\cap T_2$.

ב. נקודות $(0,0),(1,1)$ הן מבודדות.

ג. $(X,\tau_{\le_L})$ מכיל תת מרחב $Y:=(0,1)\times\{1\}$ שהומיאומורפי לקו סורגנפרי.

ד. $(X,\tau_{\le_L})$ לא מטריזבילי.

הערה 1.: למרחב $([0,1]\times\{0,1\},\tau_{\le_L})$ יש שמות שונים בספרות:

double arrow, split interval (לעיתים "מורידים" נקודות מבודדות $(1,1)$, $(0,0)$)

הערה 2.: קיימות הכללות מעניינות וחשובות באישומים.

למשל: נניח $(K,\le)$ רבוצה עם סדר ליניארי. לכל תת קבוצה $A\subseteq K$ אפשר להגדיר

קבוצה סדורה לנארית חדשה $K_A:=K\times\{0\}\cup A\times\{1\}$ עם **סדר לקסיקוגרפי**.

אינטויטיבת זה המצב שמפצלים נקודות רק מהקבוצה A.

למשל: תבדקו שאם ניקח קבוצה סדורה $[0,1]_{\{\frac{1}{2}\}}$ (מפצלים רק נקודה אחת $\frac{1}{2}\in[0,1]$) אז נקבל מרחב

טופולוגי הומיאומורפי ל ("סכום" של שני קטעים סגורים)

הגדרה: נניח $(G,\cdot)$ חבורה ו - (G,τ) מ"ט.

אומרים ש - $(G,\cdot,\tau) \in TGr$ חבורה טופולוגית $(Topological\ Group)$ אם מתקיימים:

א. "כפל" $G \times G \xrightarrow{\cdot} G \quad (a,b) \mapsto a \cdot b$ פונקציה רציפה.

(שקול: $V_1V_2 \subseteq U \quad \forall a_1,a_2 \in G\ \forall U \in N(ab)\ \exists V_1 \in N(a_1), V_2 \in N(a_2)$)

ב. "ההיפוך": $a \mapsto a^{-1} \quad G \to G$ פונקציה רציפה.

(שקול: $U^{-1} \in N(a^{-1}) \quad \forall a \in G\ \ \forall U \in N(a)$)

דוגמאות:

- כל מרחב נורמי $(E,\|\cdot\|)$ מגדיר חבורה טופולוגית $(E,+,\tau_{\|\cdot\|})$
- $(\mathbb{Z},+,top(d_p))$
- טורוס T^n חבורה טופולוגית קומפקטית (מה היא הפעולה ?)
- $GL(n,\mathbb{R})$
- כל חבורה בטופולוגיה דיסקרטית

הערה: בהגדרה TGr - (א) $\nRightarrow$ (ב).

דוגמה: $(\mathbb{R},+,\tau_S)$ בטופולוגית סורגנפרי.

תזכורת: $\mathbb{R} \supseteq O \in \tau_S \overset{def}{=} \forall\, x \in O\ \exists \epsilon > 0: [x,x+\epsilon) \subseteq O$

למשל $[0,1) \in \tau_S$ פתוחה אבל לא $(-1,0]$ (שהוא מקור של $[0,1)$).

הסבר נוסף: $\lim \frac{1}{n} = 0\ but\ \lim(-\frac{1}{n}) \neq 0$.

תרגיל: נניח G ח"ט. אז כל הזזה ימנית $T_a : G \to G, T_a(x) = xa$

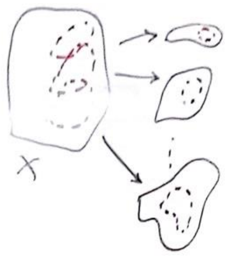
הומיאומורפיזם (ז"א $T_a \in Homeo(G)$ (נכון גם לשמאלית $_aT : G \to G,\ _aT(x) = ax$).

הסיקו שכל ח"ט היא הומוגנית.

הערה: על חבורות טופולוגיות ראו באתר http://u.math.biu.ac.il/~megereli/seminar.html

<u>הגדרה:</u> טופולוגיה חלשה $(Weak\ Topology)$.

נניח X קבוצה. $(X_i,\tau_i)\in TOP$, $i\in I$ מ"ט ונתונה משפחה של פונקציות $X\overset{f_i}{\to}X_i$. אז



קיימת טופולוגיה τ_w על X כך ש

א. $(X,\tau_w)\overset{f_i}{\to}(X_i,\tau_i)$ רציפות.
ב. בהינתן ש – σ טופולוגיה מסוימת על X כך ש
ג. $(X,\sigma)\overset{f_i}{\to}(X_i,\tau_i)$ רציפות מתקיים $\sigma\supseteq\tau_w$

(ז"א τ_w היא **הכי חלשה כך שמתקיים א'**).

τ_w נקראת **"טופולוגיה חלשה"**. הגדרה פורמלית:

$$\tau_w=(\alpha^{\cap F})^{\cup}$$

כאשר $\alpha\coloneqq\{f_i^{-1}(O_i)\big|O_i\in\tau_i,i\in I\}$.

לפי הבנייה α פרה-בסיס ל - τ_w ו - $\gamma\coloneqq\alpha^{\cap F}$ בסיס ל - τ_w.

דוגמאות של "טופולוגיה חלשה": מכפלה, תת-מרחב , טופולוגיה נקודתית, טופולוגיה שמוגדרת ע"י משפחת פסאודו-מטריקות, טופולוגיה חלשה במרחבים נורמיים ...

<u>**משפט:**</u> (טופולוגיה חלשה)

נניח (Y,σ) מ"ט ונתונה פונקציה $X\overset{g}{\to}Y$.

כמו קודם, τ_w מסמן טופולוגיה חלשה מעל X לגבי $(X_i,\tau_i)\underset{i\in I}{\overset{f_i}{\to}}X$.

אזי $(X_i,\tau_i)\underset{i\in I}{\overset{f_i\circ g}{\to}}Y$ רציפות $\Leftrightarrow$ $(X,\tau_w)\overset{g}{\to}Y$ רציפה.

<u>**הוכחה:**</u>

<u>$(\Rightarrow)$:</u> ברור, כי הרכבה שומרת על רציפות.

<u>$(\Leftarrow)$:</u>

צ"ל $(X,\tau_w)\overset{g}{\to}Y$ רציפה.

ש"ל $\forall O\in\tau_w: g^{-1}(O)\in\sigma$.

מ"ל (על פרה-בסיס = α). ז"א כאשר

$$\exists i \in I: f_i^{-1}(O_i) = O \in \alpha$$

$$(f_i \circ g)^{-1}(O_i) = g^{-1}\left(f_i^{-1}(O_i)\right) = g^{-1}(O)$$

פתוחה בגלל רציפות של $f_i \circ g$.

■

תוצאה: τ_w הטופולוגיה הכי חלשה כך ש...

הסבר: זה נובע מהמשפט. אם ניקח $(X,\tau_w) \overset{g=id}{\rightarrow} X = Y$. מהרציפות נקבל $\sigma \supseteq \tau_w$.

מקרים פרטיים של טופולוגיה חלשה:

- **תת מרחב טופולוגי:**

$(X,\tau) \underset{\text{שיכון}}{\overset{i}{\hookleftarrow}} (Y,?)$ (Y תת קבוצה של X).

$$\tau_Y = \tau_w$$

שווה לטופולוגית תת מרחב (שכבר הגדרנו !).

שימו לב: $\forall O \in \tau \subseteq X: i^{-1}(O) = O \cap Y$

- **מכפלה טופולוגית של n גורמים** $(X_i,\tau_i)\ \ i \in \{1,\cdots,n\}$

$X = (\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} X_i, \tau_\Pi)$ מ"ט ו τ_Π הכי חלשה, שמבטיחה רציפות של הטלות

$$\mathrm{p}_i : (\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}} \mathrm{X}_i, \tau_\Pi) \to (\mathrm{X}_i, \tau_i) \quad (x_1,\cdots,x_n) \mapsto x_i$$

מתקיים $\tau_w = \tau_\Pi$ טופולוגית מכפלה כפי שהגדרנו ! $\tau_\Pi = (\alpha^{\cap_F})^{\cup}$

כאשר $\alpha := \{\mathrm{p}_i^{-1}(O_i) = \mathrm{X}_1 \times \cdots \times O_i \times \cdots \times X_n \mid O_i \in \tau_i\}$ פרה-בסיס "תיבות אלמנטריות".

- **הגדרה:** **מכפלה טופולוגית** (אין הגבלה) $(X_i,\tau_i)\ \ i \in I$

$$X = \left\{ I \overset{x}{\rightarrow} \bigcup_{i\in I} X_i, x(i) \in X_i \right\} = \prod_{i\in I} X_i \overset{p_i}{\rightarrow} (X_i,\tau_i)$$

מכפלה קרטזית (כקבוצה). איבר טיפוסי "וקטור מוכלל" $x=(x_i)_{i\in I}$ (פונקציות)

<u>היטלים:</u> $p_{i_0}(x)=x(i_0)=x_{i_0}$

מגדירים $\tau_w=\tau_\prod=(\alpha^{\cap F})^{\cup}$ כטופולוגיה חלשה (טופולוגית *Tychonoff*).

$\alpha:=\{p_i^{-1}(O_i)\mid O_i\in\tau_i\}$ תיבות אלמנטריות. פרה-בסיס סטנדרטי

$\gamma:=\alpha^{\cap F}=\{\text{תיבות בסיסיות}\}=\{\bigcap_{j\in J}p_j^{-1}(O_j)\mid J\subseteq I \text{ סופי}, O_j\in\tau_j\}$ בסיס סטנדרטי

הערות על מכפלה קרטזית $X=\prod_{i\in I}X_i$ **והיטלים** $\prod_{i\in I}X_i\xrightarrow{p_i}X_i$

א. $p^{-1}_i(O_i)=O_i\times\prod_{j\in I\setminus\{i\}}X_j$

ב. $p_i^{-1}(O_i)\cap p_k^{-1}(O_k)=O_i\times O_k\times\prod_{j\in I\setminus\{i,k\}}X_j$

ג. $p_k(\bigcap_{i\in J}p_j^{-1}(O_j))=\begin{Bmatrix}O_k & if\ k\in J\\ X_k & if\ k\notin J\end{Bmatrix}$

ד. $O\in\tau_\prod\Leftrightarrow x=(x_i)_{i\in I}\in O\Rightarrow\exists\ finite\ J\subseteq I\ \exists O_j\in\tau_j\quad x\in\bigcap_{i\in J}p_j^{-1}(O_j)\subseteq O$

שימו לב: תנאי $x\in\bigcap_{i\in J}p_j^{-1}(O_j)$ שקול ל $x_j\in O_j\quad\forall j\in J$.

- <u>טופולוגיה המוגדרת דרך משפחת פסאודו-מטריקות:</u>

א. <u>תזכורת</u>: אם ρ פסאודו מטריקה מעל קבוצה X אז

$$top(\rho)=\{\text{פתוחות במובן } \rho\}=\{B_\rho(x,r)\mid x\in X,r>0\}^{\cup}=\gamma^{\cup}$$

ב. נניח שנתונה משפחה $\{\rho_i\}_{i\in I}$ של פסאודו-מטריקות על אותה קבוצה X.

מגדירים $\tau_w(\{\rho_i\}_{i\in I})$ כטופולוגיה חלשה של אוסף הפונקציות הזהות:

$\{X\xrightarrow[i\in I]{id}(X,top(\rho_i))\}$ $(\forall i{:}\ f_i=id$ ז"א$)$

לכן $\tau_w=(\alpha^{\cap F})^{\cup}$

כאשר $\alpha:=\{B_{\rho_i}(x,r)\mid x\in X,r>0,i\in I\}$

"כדורים" פרה-בסיס ל τ_w.

• **טופולוגיה נקודתית** על $X=C[0,1]$ (ניתן להכללות):

עבור $t\in[0,1]$ נגדיר פסאודו-מטריקה $\rho_t(f_1,f_2)=|f_1(t)-f_2(t)|$. נקבל

$$\{\rho_t\}_{t\in[0,1]}$$
$$\downarrow$$
$$\tau_w\left(\{\rho_t\}_{t\in[0,1]}\right)=:\tau_p$$

טופולוגיה זו נקראת טופולוגיה נקודתית ($pointwise\ topology$).

הערה: $\left(C[a,b],\tau_p\right)\subsetneq top(d_{max})$

המרחב $\left(C[a,b],\tau_p\right)$ הוא לא מטריזבילית אבל חשוב באנליזה.

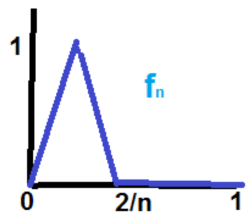
אוסף γ קבוצות הבאות:

$$\gamma=\{V_{\varepsilon,p_1,p_2,\cdots,p_n}(g):\quad g\in C[a,b],\varepsilon>0,p_1,p_2,\cdots,p_n\in[a,b]\}$$

$$V_{\varepsilon,p_1,p_2,\cdots,p_n}(g)=\{f\in C[a,b]:|f(p_k)-g(p_k)|<\varepsilon\}$$

הוא בסיס לטופולוגיה τ_p.

$\tau_p\neq top(d_{\max})$. למשל סדרת הפונקציות $f_n\in C[0,1]$ הבאה (עם $f_n(\frac{1}{n})=1$)



מתכנסת בטופולוגיה נקודתית τ_p לפונקצית האפס θ (כאשר $\theta(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$.

ראו שכל סביבה של θ מהטיפוס של γ מכילה כמעט כל האיברים של הסדרה.

אבל אין התכנסות בטופולוגיה של $top(d_{\max})$ כי $d(f_n,\theta)=1$ (לא שואף לאפס).

הגדרה: $f:X\to Y$ נקרה **שיכון טופולוגי** אם פונקציה מושרת $f:X\to f(X)$ הומיאומורפיזם.

• **טופולוגיה p – אדית:**

$$top(d_p)=\tau_w\left\{\mathbb{Z}\underset{k\mapsto k+p^n\mathbb{Z}}{\overset{f_n}{\longrightarrow}}(\mathbb{Z}_{p^n},discr)\quad n\in\mathbb{N}\right\}$$

בעצם פונקצית האלכסון $f(x)=(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad f=\Delta_{n\in\mathbb{N}}f_n:(\mathbb{Z},d_p)\to\prod_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}_{p^n}$

מגדיר שיכון טופולוגי בתוך מכפלה טופולוגית.
($\mathbb{Z}_{p^n}=\{0,1,\cdots,p^n-1\}$ מסמן חבורה ציקלית סופית דיסקרטית עם p^n איברים).

- **טופולוגיה חלשה על מרחב Hilbert** $(l_2,\|.\|)$ היא טופולוגיה המושרית מאוסף של הפונקציונלים $\{f_a:l_2\to\mathbb{R}\quad f_a(x)=<a,x>:\quad a\in l_2\}$.
הערה: "כדור סגור" $B_r[\theta]$ קומפקטי בטופולוגיה חלשה הנ"ל. לעומת זאת $B_r[\theta]$ לא קומפקטי בטופולוגית מרחב נורמי $(l_2,\|.\|)$ (נלמד !) .

__טענה__: נניח $f_i:Y_i\to X_i$ פונקציות רציפות $\forall i\in I$.

הוכיח "שפונקצית המכפלה" $f:=\prod_{i\in I}f_i$ הבאה היא רציפה

$$f:\prod_{i\in I}Y_i\to\prod_{i\in I}X_i\qquad f((y_i)_{i\in I})=(f_i(y_i))_{i\in I}.$$

__הוכחה__: הרעיון הוא להשתמש במשפט "טופולוגיה חלשה".

נגדיר $Y:=\prod_{i\in I}Y_i,X=\prod_{i\in I}X_i$. נסמן ההטלות ב p_i^Y,p_i^X . אז יש לנו פונקציה $f:Y\to X$ כך ש $p_i^X\circ f=f_i\circ p_i^Y$. נתון ש f_i רציפה. לכן גם $f_i\circ p_i^Y$ ששווה ל $p_i^X\circ f$. לפי המשפט הנ"ל אפשר להסיק ש f רציפה.

☺

__תוצאה__: אם כל גורם $f_i:Y_i\to X_i$ הומיאומורפיזם אז גם $f:Y\to X$.
$Y_i\simeq X_i\Rightarrow\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}}Y_i\simeq\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}}X_i$.

__דוגמה__: $\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}\simeq(-1,1)\times(0,7)\times(5,\infty)\times\mathbb{N}^2$

__תרגיל__: $S_2\setminus\{z\}\simeq(0,1)\times(2,4)$

__הסבר__: נזכיר $S_2\setminus\{z\}\simeq\mathbb{R}^2\quad\forall z\in S_2$ היטל סטראוגרפי.

מצד שני, $\mathbb{R}^2\simeq(0,1)\times(2,4)$ בגלל הטענה הקודמת ו- $\mathbb{R}\simeq(a,b)$.

__תרגיל__: $X\times Y\simeq Y\times X$

נסו להוכיח וגם להכליל למקרה של *n* גורמים ותמורות. למשל
$X_1\times X_2\times X_3\simeq X_3\times X_2\times X_1$.