תרגיל 2 – בדידה קיץ

1. תהי קבוצה A, ויהי היחס $R \subseteq A \times A$. הוכח **שקיים** יחס שקילות **יחיד** T כך ש $R \subseteq T$ ולכל יחס שקילות אחר S כך ש $R \subseteq S$ מתקיים בהכרח $T \subseteq S$, (כלומר, T הינו יחס השקילות הקטן ביותר המכיל את R).

שים לב שלפי התרגיל ניתן להגדיר חלוקה של קבוצה לפי כל יחס על ידי מחלקת השקילות של יחס השקילויות הקטן ביותר המכיל אותו.

נסיון לבנות T כזה על ידי השלמה של R ליחס שקילות יתגלה כתהליך סבוך ולא סופי (למרות עצה שנתתי בשוגג לתלמידים). אם כן, נפתור את השאלה בדרך אחרת:

נביט באוסף כל יחסי השקילות המכילים את R. לא תרגיל מסובך מידי להראות שהחיתוך הכללי על אוסף זה הינו יחס שקילות (רפלקסיביות – ברור. סימטריות – אם משהו בחיתוך גם הסימטרי שלו בחיתוך, טרנזיטיביות – כנ"ל).

אם כן, החיתוך הכללי הינו יחס שקילויות שמכיל את R מתוך הגדרת האוסף, ומוכל בכל יחסי השקילות האחרים מתוך הגדרת החיתוך.

כיצד אנחנו יודעים שאוסף יחסי השקילות המכילים את R אינו ריק? מכיוון שיחס השקילות $A \times A$ מכיל את R לפי ההגדרה, ולכן הוא באוסף.

מדוע הוא יחיד? אם היה יחס שקילות אחר שמקיים תנאים אלה, הם היו מוכלים אחד בשני ואז היינו מקבלים שיוויון ביניהם מתוך הכלה דו כיוונית.

2.

a. נתונה הקבוצה $A = \{2,3\}$ ונתון היחס $R = \{(2,3)\}$, השלם את R להיות יחס טרנזיטיבי וסימטרי, האם היחס שקיבלת הינו יחס שקילויות?

$T = \{(2,3),(3,2),(2,2),(3,3)\}$. קיבלנו את אוסף כל הזוגות הסדורים שהוא אכן יחס שקילויות.
הרפלקסיביות הגיע מתוך טרנזיטיביות אחרי הסימטריות

b. השלם את הקבוצה הריקה ליחס שקילויות על $A = \{1,2,3\}$. מהו היחס שקיבלת? מהן מחלקות השקילות?

$T = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ זהו יחס השיוויון, ומחלקות השקילות הינן $[1],[2],[3]$

.3

a. כמה יחסים יש על הקבוצה A כאשר נתון $|A|=k$? (זכרו כי $|A|$ הוא מספר האיברים בקבוצה.)

אלו כל תתי הקבוצות של אוסף הזוגות הסדורים $A\times A$. אוסף הזוגות הסדורים מכיל k^2 איברים ולכן קבוצת החזקה שלו מכילה (תרגיל שעבר) 2^{k^2} איברים. זהו מספר היחסים על הקבוצה.

b. כמה יחסי שקילות יש על הקבוצה $A=\{1,2,3\}$?

למדנו כי יחסי שקילות מתאימים בדיוק לחלוקות על הקבוצה. לכן נספור את כמות החלוקות על A.
נקבל סה"כ 5 חלוקות שונות:

$[1],[2],[3]$

$[1,2],[3]$

$[1,3],[2]$

$[2,3],[1]$

$[1,2,3]$

ולכן יש 5 יחסי שקילות על הקבוצה.

c. * מצא נוסחא (רקורסיבית) לחישוב כמות יחסי השקילות על קבוצה מגודל k
רמז: מספר הדרכים לבחור קבוצה של k תלמידים מתוך כיתה של n תלמידים הינו:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

זוהי למעשה בעייה קומבינטורית של ספירת מספר החלוקות האפשריות. הפתרון לבעייה הוא **מספר בל** $B_{k+1}=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}B_r$

הגדרה: יהיו יחסים $R\subseteq B\times C, S\subseteq A\times B$:

- ה**הרכבה** של R על S מוגדרת להיות היחס $R\circ S\subseteq A\times C$ כאשר
$$R\circ S=\{(a,c)\,|\,\exists b\in B:[(a,b)\in S]\wedge[(b,c)\in R]\}$$
(יש המסמנים הפוך $S\circ R$, אבל אנחנו לא כאלה)
- ה**הופכי** של R מוגדר להיות היחס $R^{-1}\subseteq C\times B$ כאשר $R^{-1}=\{(c,b)\,|\,(b,c)\in R\}$

.4 הוכח כי $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$

$(c,a)\in(R\circ S)^{-1}$ אם"ם $(a,c)\in R\circ S$ אם"ם $\exists b\in B:[(a,b)\in S]\wedge[(b,c)\in R]$ אם"ם $\exists b\in B:[(c,b)\in R^{-1}]\wedge[(b,a)\in S^{-1}]$ אם"ם $(c,a)\in S^{-1}\circ R^{-1}$