פתרון לתרגיל 6

1. $f(x,y,z)=xy^2z^3$ וברור ש f דיפרנציאבילית כי נגזרותיה החלקיות רציפות. לכן נשתמש בנוסחא שמערבת גרדיאנט. חישוב פשוט מראה ש

$$\nabla f(x,y,z)=(y^2z^3,2xyz^3,3xy^2z^2)$$

ולכן

$$\nabla f(3,2,1)=(4,12,36)$$

הנגזרת הכיוונית בכיוון h היא

$$\frac{\partial f}{\partial h}=\frac{1}{||h||}\nabla f(3,2,1)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{||h||}(4,12,36)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}=\frac{4h_1+12h_2+36h_3}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$$

2. נשים לב ש

$$1=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(t,-t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(0,0)+f(0,0)-f(t,-t)}{t}=$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t,t)-f(0,0)}{t}-\lim_{t\to 0}\frac{f(t,-t)-f(0,0)}{t}=D_{(1,1)}f(0,0)-D_{(1,-1)}f(0,0)$$

בגלל ש f דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ אנו יודעים כי

$$D_{(1,1)}f(0,0)=(f_x(0,0),f_y(0,0))\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=f_x(0,0)+f_y(0,0)$$

$$D_{(1,-1)}f(0,0)=(f_x(0,0),f_y(0,0))\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=f_x(0,0)-f_y(0,0)$$

ולכן

$$1=D_{(1,1)}f(0,0)-D_{(1,-1)}f(0,0)=2f_y(0,0)$$

כלומר

$$f_y(0,0)=\frac{1}{2}$$

3. שימוש פשוט בכלל השרשרת מראה ש

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,1)=\frac{\partial f}{\partial u}(7,1)\frac{\partial u}{\partial x}(2,1)+\frac{\partial f}{\partial v}(7,1)\frac{\partial v}{\partial x}(2,1)=2\cdot 2+3\cdot 1=7$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2,1)=\frac{\partial f}{\partial u}(7,1)\frac{\partial u}{\partial y}(2,1)+\frac{\partial f}{\partial v}(7,1)\frac{\partial v}{\partial y}(2,1)=2\cdot 3+3\cdot(-1)=3$$

4. אם נהפוך את המשוואות של המשתנים הפולריים נקבל

$$\varphi = arctan\frac{y}{x} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

ולכן

$$\varphi_x^{'} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}(-\frac{y}{x^2}) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \varphi_y^{'} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}(\frac{1}{x}) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$r_x^{'} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad r_y^{'} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ולכן

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial z}{\partial r}$$

ולכן

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = x(\frac{x}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial z}{\partial r}) - y(\frac{-y}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial z}{\partial r}) =$$

$$\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

לכן התשובה היא

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

5.

(א) נחשב ראשית עבור $\arctan\frac{y}{x}$

$$f_x^{'} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot (-\frac{y}{x^2}) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx}^{''} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y^{'} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot (\frac{1}{x}) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$f_{yy}^{''} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

לכן ברור שהסכום

$$f_{xx}^{''} + f_{yy}^{''} = 0$$

(ב) נעבור ל $\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$:

$$f_x^{'}=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{-x}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx}^{''}=\frac{-(x^2+y^2)+2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

בחישוב סיטמרי נקבל

$$f_{yy}^{''}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ושוב ברור ש

$$f_{xx}^{''}+f_{yy}^{''}=0$$

6. ראשית, ברור כי

$$f_y^{'}(0,0)=f_x^{'}(0,0)=0$$

נמצא גם את ערך הנגזרות החלקיות במקומות נוספים:

$$f_x^{'}(x,y)=y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

לכן ברור כי

$$f_x^{'}(0,y)=-y$$

והנגזרת החלקית השניה היא

$$f_y^{'}(x,y)=x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

לכן

$$f_y^{'}(x,0)=x$$

כעת נחשב את הנגזרות המעורבות ונקבל:

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_x(0,t)-f_x(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{t}=-1$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_y(t,0)-f_y(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t}=1$$

הנגזרות המעורבות קיימות אבל לא שוות.

7. נבצע החלפת משתנים: נתחיל עם g_s

$$g_s = f_x x_s + f_y y_s$$

עכשיו

$$\frac{\partial}{\partial t}(g_s) = \frac{\partial}{\partial t}(f_x x_s + f_y y_s) = \frac{\partial}{\partial t}(f_x)x_s + f_x x_{st} + \frac{\partial}{\partial t}(f_y)y_s + f_y y_{st} =$$
$$(f_{xx}x_t + f_{xy}y_t)x_s + f_x x_{st} + (f_{yx}x_t + f_{yy}y_t)y_s + f_y y_{st} =$$
$$f_{xx}x_t x_s + f_{xy}y_t x_s + f_x x_{st} + f_{yx}x_t y_s + f_{yy}y_t y_s + f_y y_{st}$$

במקרה שלנו

$$x_s = x_t = e^{s+t} = x$$

$$x_{ts} = e^{s+t} = x$$

$$y_s = e^{s-t} = x$$

$$y_t = -e^{s-t} = -y$$

$$y_{st} = -e^{s-t} = -y$$

אם נציב את כל אלה בביטוי שלנו נקבל ש

$$g_{st} = f_{xx}x^2 - f_{xy}xy + f_x x + f_{yx}xy - f_{yy}y^2 - f_y y =$$
$$f_{xx}x^2 + f_x x - f_{yy}y^2 - f_y y$$

לכן ברור ש

$$g_{st} = 0 \Leftrightarrow x^2 f_{xx} + x u_x = y^2 f_{yy} + y f_y$$