פתרון תרגיל 4 חדוא 2

<u>שאלה ראשונה:</u>

1. $$\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}dx = \begin{Bmatrix} f' = \frac{1}{\sqrt{x}} & g = \ln^2(x) \\ f = 2\sqrt{x} & g' = \frac{2\ln(x)}{x} \end{Bmatrix} = \left[2\sqrt{x}\ln^2(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{4\ln(x)}{\sqrt{x}}dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} f' = \frac{4}{\sqrt{x}} & g = \ln(x) \\ f = 8\sqrt{x} & g' = \frac{1}{x} \end{Bmatrix} = \left[2\sqrt{x}\ln^2(x) - 8\sqrt{x}\ln(x)\right]_1^e + \int_1^e \frac{8}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\ln^2(x) - 8\sqrt{x}\ln(x) + 16\sqrt{x}\right]_1^e =$$

$$= \left(2\sqrt{e} - 8\sqrt{e} + 16\sqrt{e}\right) - 16 = 10\sqrt{e} - 16$$

2. $$\int_{e^{-1}}^e \left|\ln(x)\right| dx$$

על מנת להפטר מהערך המוחלט, נחלק לתחומים לפי השליליות של הפונקציה.

$$\int_{e^{-1}}^e \left|\ln(x)\right| dx = \int_{e^{-1}}^1 \left|\ln(x)\right| dx + \int_1^e \left|\ln(x)\right| dx = \int_{e^{-1}}^1 \left(-\ln(x)\right) dx + \int_1^e \ln(x) dx = \left[-\left(x\ln(x) - x\right)\right]_{e^{-1}}^1 + \left[x\ln(x) - x\right]_1^e =$$

$$= 1 - \frac{2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e}$$

3. $$\int_0^{\pi} e^x\cos^2(x)dx=\left\{\begin{matrix} f'=e^x & g=\cos^2(x) \\ f=e^x & g'=-2\cos(x)\sin(x)=-\sin(2x)\end{matrix}\right\}=\left[e^x\cos^2(x)\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi} e^x\sin(2x)dx=$$

ראשית נחשב את $\left[e^x\cos^2(x)\right]_0^{\pi}=e^{\pi}-e^0=e^{\pi}-1$

כעת נחשב את השטח

$$I=\int_0^{\pi} e^x\sin(2x)dx=\left\{\begin{matrix} f'=e^x & g=\sin(2x) \\ f=e^x & g'=2\cos(2x)\end{matrix}\right\}=\left[e^x\sin(2x)\right]_0^{\pi}-2\int_0^{\pi} e^x\cos(2x)dx=$$

$$=0-2\int_0^{\pi} e^x\cos(2x)dx=\left\{\begin{matrix} f'=e^x & g=\cos(2x) \\ f=e^x & g'=-2\sin(2x)\end{matrix}\right\}=-2\left[e^x\cos\left(2x\right)\right]_0^{\pi}-4\int_0^{\pi} e^x\sin(2x)dx$$

חזרנו למקורות ולכן ביחד

$$I=-2\left[e^x\cos\left(2x\right)\right]_0^{\pi}-4I=-2\left(e^{\pi}-1\right)-4I$$

ולכן $I=-\frac{2}{5}\left(e^{\pi}-1\right)$

וסה"כ $\int_0^{\pi} e^x\cos^2(x)dx=\left(e^{\pi}-1\right)-\frac{2}{5}\left(e^{\pi}-1\right)=\frac{3}{5}\left(e^{\pi}-1\right)$

4. $$\int_0^{0.5} x\sqrt{1-x^2}dx=\left\{\begin{matrix} t=1-x^2 \\ dt=-2xdx \\ x=0\to t=1 \\ x=0.5\to t=0.75\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2}\int_1^{0.75}\sqrt{t}dt=-\frac{1}{2}\left[\frac{t^{1.5}}{1.5}\right]_1^{0.75}=-\frac{1}{2}\left(\frac{0.75^{1.5}}{1.5}-\frac{1}{1.5}\right)$$

.5 $$\int_{\sqrt{3}}^{3}\frac{dx}{x^4-1}=\int_{\sqrt{3}}^{3}\frac{dx}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}=$$

נפרק לשברים חלקים זריז:

$$=\int_{\sqrt{3}}^{3}\frac{dx}{(x^2+1)(x+1)(x-1)}=\int_{\sqrt{3}}^{3}\left(-\frac{1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{4(x-1)}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\Big[-2\arctan(x)-\ln|x+1|+\ln|x-1|\Big]_{\sqrt{3}}^{3}=$$

$$=\frac{1}{4}\big(-2\arctan(3)-\ln(4)+\ln(2)\big)-\frac{1}{4}\left(-2\arctan(\sqrt{3})-\ln(1+\sqrt{3})+\ln(\sqrt{3}-1)\right)$$

.6 $$\int_{e^{-1}}^{1}\frac{dx}{x+x\ln^2(x)}=\int_{e^{-1}}^{1}\frac{1}{x}\frac{1}{1+\ln^2(x)}dx=\left\{\begin{array}{l} t=\ln(x)\\ dt=\frac{1}{x}dx\\ x=e^{-1}\to t=-1\\ x=1\to t=0\end{array}\right\}=\int_{-1}^{0}\frac{dt}{1+t^2}=\big[\arctan(t)\big]_{-1}^{0}=\frac{\pi}{4}$$

.7 $$\int_{0}^{1}\frac{|x-1|}{|x-2|+3}dx=\int_{0}^{1}\frac{1-x}{2-x+3}dx=\int_{0}^{1}\left(1+\frac{4}{x-5}\right)dx=\Big[x+4\ln|x-5|\Big]_{0}^{1}=\big(1+4\ln(4)\big)-\big(4\ln(5)\big)$$

שאלה שנייה:

בכל השאלות הבאות נשתמש בעובדה הבאה. אם f רציפה, ו P_n סדרת חלוקות של קטע עם פרמטר חלוקה שואף לאפס אזי סכומי הרימן שואפים לשטח מתחת לגרף הפונקציה בקטע.

בפרט, המקרה הנפוץ ביותר הוא מהצורה הבאה: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1 f(x)dx$ כאשר $P_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,1\right\}$.

במבחן צריך להסביר מדוע זה סכום רימן, מהן החלוקות, להזכיר שהפונקציה רציפה ולכן אינטגרבילית בקטע.

1. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\to\int_0^1 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

2. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{\pi k}{n}\right)\to\int_0^1\cos(\pi x)dx=\left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]_0^1=0$$

3. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{n}\sqrt{4+\frac{5k}{n}}\to\int_0^1 5\sqrt{4+5x}dx=\left[\frac{(4+5x)^{1.5}}{1.5}\right]_0^1=\frac{9^{1.5}}{1.5}-\frac{4^{1.5}}{1.5}$$

4. $$\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2n}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5k}{2n}\right)\to\int_0^1\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{2}x\right)dx=\frac{\pi}{2}\left[-\frac{2}{5}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{2}x\right)\right]_0^1=\frac{\pi}{2}\left(\frac{2}{5}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{2}{5}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{2}\right)\right)$$

5. $$\frac{1}{n}\ln(n!)-\ln(\mathrm{n})=\frac{1}{n}\ln(1\cdot 2\cdots n)-\frac{1}{n}\mathrm{n}\ln(\mathrm{n})=\frac{1}{n}\left(\ln(1)-\ln(n)+\ln(2)-\ln(n)+...+\ln(\mathrm{n})-\ln(\mathrm{n})\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\ln(k)-\ln(\mathrm{n})\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

לכאורה היינו אומרים כעת שזה שואף לאינטגרל $\int_0^1 \ln(x)dx$ אבל זה אינטגרל לא אמיתי! (הפונקציה

$\ln(x)$ אינה חסומה בקטע ולכן אינה אינטגרבילית).

ננסה כיוון אחר של פתרון:

$$\frac{1}{n}\ln\left(n!\right)-\ln(n)=\frac{\ln\left(n!\right)-n\ln(n)}{n}=\frac{\ln\left(n!\right)-\ln(n^n)}{n}=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)=\ln\left(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\right)$$

אבל כבר למדנו שבעזרת כלל המנה ניתן לחשב את הגבול $\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\to\frac{1}{e}$ ולכן סה"כ

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\ln\left(n!\right)-\ln(n)\right)=-1$$

<u>הערה:</u> נחשב את האינטגרל הלא אמיתי

$$\int_0^1 \ln(x)dx=\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \ln(x)dx=\lim_{t\to 0^+}\left[x\ln(x)-x\right]_t^1=\lim_{t\to 0^+}\left(-1-t\ln(t)+t\right)=-1$$

(שימו לב שניתן להוכיח ש $t\ln(t)\xrightarrow{t\to 0^+}0$ כפי שלמדנו בחישוב גבולות).

האם זה מקרי שקבלנו את אותה תוצאה? לא.

סכומי דרבו עליונים של פונקציה חסומה מלעיל, יתכנסו לאינטגרל הלא אמיתי שלה.

(זה משפט שלא למדנו.)

$$\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+k}}{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}==\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}}{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n}\sqrt{\frac{k}{n}}}=\frac{\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}}{\sqrt{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}}{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}}=$$ .6

$$=\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}}}\to\frac{\int_0^1\sqrt{1+x}}{\int_0^1\sqrt{x}}=\frac{\left[\frac{(1+x)^{1.5}}{1.5}\right]_0^1}{\left[\frac{x^{1.5}}{1.5}\right]_0^1}=\frac{\frac{2^{1.5}}{1.5}-\frac{1}{1.5}}{\frac{1}{1.5}}=2^{1.5}-1$$

שאלה שלישית:

1. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\left(x^2+\cos(x)\right)^{\frac{1}{4}}}$$

ראשית נזהה שמדובר בפונקציה חיובית ורציפה בכל קטע מהצורה $[0,t]$ שכן $\cos(x)$ שלילית רק

החל מ π ובשלב זה $x^2>\pi^2>1\geq\cos(x)$ ולכן המכנה לא יכול להתאפס.

כמובן שהאינטגרל מתכנס אם ורק אם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\left(x^2+\cos(x)\right)^{\frac{1}{4}}}$ מתכנס

(כי בקטע $[0,1]$ מדובר באינטגרל אמיתי.)

נבצע מבחן השוואה גבולי עם האינטגרל $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.5}}$ שהוא כמובן מתכנס כיוון ש $1.5>1$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{(x+1)\left(x^2+\cos(x)\right)^{\frac{1}{4}}}\right)}{\left(\frac{1}{x^{1.5}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{1.5}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)x^{0.5}\left(1+\frac{\cos(x)}{x^2}\right)^{0.25}}=1$$

לכן האינטגרלים חברים, ולכן גם האינטגרל המקורי מתכנס.

2. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(\ln(x)+1)(x^2+1)^{0.5}}$

נפעיל מבחן השוואה גבולי עם $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln(x)}$ (בקטע $[1,2]$ הפונקציה המקורית רציפה ולכן האינטגרל

מתכנס).

אכן האינטגרלים חברים:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{(\ln(x)+1)(x^2+1)^{0.5}}\right)}{\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\ln(x)}{\ln(x)\left(1+\frac{1}{\ln(x)}\right)x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{0.5}} = 1$$

לכן מספיק לפתור את השאלה עבור האינטגרל הפשוט יחסית $\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln(x)}$.

נעשה זאת:

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln(x)} = \lim_{t\to\infty} \int_{2}^{t} \frac{dx}{x\ln(x)} = \left\{\begin{array}{l} u=\ln(x) \\ du=\frac{1}{x}dx \\ x=2\to u=\ln(2) \\ x=t\to u=\ln(t) \end{array}\right\} = \lim_{t\to\infty} \int_{2}^{t} \frac{du}{u} = \lim_{t\to\infty} \Big[\ln|u|\Big]_{2}^{t} = \lim_{t\to\infty} \big(\ln(t)-\ln(2)\big) = \infty$$

כיוון שאינטגרל זה מתבדר, כך גם חבר שלו – האינטגרל המקורי.

3. $\int_{1}^{\infty} \frac{e^{\sin(x)}}{x^2}dx \le \int_{1}^{\infty} \frac{e}{x^2}dx = e\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$

כיוון שהאינטגרל הגדול יותר מתכנס, לפי מבחן ההשוואה הראשון לאינטגרלים חיוביים האינטגרל

המקורי מתכנס גם הוא.

4. $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx$

אינטגרל זה גדול יותר באופן גבולי מהאינטגרל המתכנס $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}\,dx$ בגלל ה $\ln(x)$.

נשווה לאינטגרל קצת יותר גדול שעדיין מתכנס $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}\,dx$.

נבצע את מבחן ההשוואה ונקבל $0 = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\frac{4}{3}-\frac{5}{4}}} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{\ln(x)}{(x+1)\cdot\sqrt[3]{x}}\right)}{\left(\frac{1}{x^{\frac{5}{4}}}\right)}$, כלומר האינטגרל

במונה קטן מהאינטגרל המתכנס שבמכנה, ולכן לפי מבחן ההשוואה הגבולי האינטגרל המקורי

מתכנס.