מבחן מועד א' – 88-610 בדידה למורים – תשע"ז

משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: דר' ארז שיינר תאריך: 07/02/17 חומר עזר: מותר מחשבון

הוראות: יש לענות על כל השאלות. כל שאלה שווה 24 נק'. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

1. תהיינה שתי פונקציות $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נגדיר ש f <u>מתאימה</u> ל g אם

$$\forall x_1\in\mathbb{R}\exists x_2\in\mathbb{R}: f(x_1)\le g(x_2)$$

f <u>אינה</u> מתאימה ל g אם $\exists x_1\in\mathbb{R}\forall x_2\in\mathbb{R}: f(x_1)>g(x_2)$

א. האם $f(x)=\sin(x)$ מתאימה ל $g(x)=\cos(x)$?

יהי $x_1\in\mathbb{R}$ צריך למצוא $x_2\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x_1)\le g(x_2)$, כלומר $\sin(x_1)\le\cos(x_2)$.

נבחר $x_2=0$ ואכן $\sin(x_1)\le\cos(0)=1$.

לכן f <u>מתאימה</u> ל g.

ב. האם $f(x)=e^x$ מתאימה ל $g(x)=x$?

יהי $x_1\in\mathbb{R}$ צריך למצוא $x_2\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x_1)\le g(x_2)$, כלומר $e^{x_1}\le x_2$.

נבחר $x_2=e^{x_1}$ ואכן $e^{x_1}\le x_2$.

לכן f <u>מתאימה</u> ל g.

ג. תהיינה f,g כך ש f מתאימה ל g. האם בהכרח גם g מתאימה ל f?

נבחר את הפונקציות $f(x)=0, g(x)=1$.

מצד אחד, לכל $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x_1)\le g(x_2)$ ולכן קל להוכיח שהפונקציה f מתאימה ל g.

אבל, אם נקבע $x_1\in\mathbb{R}$ כלשהו, לכל $x_2\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $g(x_1)>f(x_2)$ ולכן g <u>אינה</u> מתאימה ל f.

2. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל שתי קבוצות A,B מתקיים כי $P(A)\setminus P(B)\neq P(A\setminus B)$.

<u>הוכחה</u>: כל קבוצה מכילה את הקבוצה הריקה, ולכן $\varnothing\in P(A),P(B),P(A\setminus B)$.

לכן $\varnothing\notin P(A)\setminus P(B)$ אבל $\varnothing\in P(A\setminus B)$ ולכן $P(A)\setminus P(B)\neq P(A\setminus B)$.

ב. לכל שלוש קבוצות A,B,C אם $A\setminus B=B\setminus C$ אזי $A\subseteq C$.

<u>הוכחה</u>: יהי $x\in A$ צ"ל כי $x\in C$.

נחלק למקרים: אם $x\in B$ אזי $x\notin A\setminus B$ ולכן $x\notin B\setminus C$.

כיוון ש $x\in B$ זה אומר ש $x\in C$.

כעת אם $x\notin B$ אזי $x\in A\setminus B$ ולכן $x\in B\setminus C$, סתירה.

ג. לכל שתי קבוצות A,B מתקיים כי $(A\setminus B)\cup B=A$.

<u>הפרכה</u>: נבחר $A=\varnothing,B=\{1\}$. לכן $(A\setminus B)\cup B=\{1\}$ אך $A=\varnothing$.

3. תהי סדרה מוגדרת ע"י $a_1=1,a_2=1$ ונוסחת הנסיגה $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

הוכיחו באינדוקציה (רגילה או מלאה) כי לכל n מתקיים כי a_{3n} זוגי.

בדיקה: עבור $n=1$ מתקיים כי $a_3=2$ אכן זוגי.

יהי n עבורו a_{3n} זוגי, צ"ל כי $a_{3(n+1)}$ זוגי.

כעת

$$a_{3(n+1)}=a_{3n+3}=a_{3n+2}+a_{3n+1}=a_{3n+1}+a_{3n}+a_{3n+1}=2a_{3n+1}+a_{3n}$$

זה סכום של שני ביטויים זוגיים ולכן זוגי.

4. תהיינה שתי פונקציות $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f\circ g\circ f$ הפיכה אז גם f הפיכה.

<u>הוכחה</u>: $f\circ g\circ f$ הפיכה ולכן חח"ע ועל.

לכן הפונקציה הפנימית בהרכבה חח"ע, והפונקציה החיצונית בהרכבה היא על.

כיוון ששתיהן שוות לפונקציה f נובע ש f חח"ע ועל ולכן הפיכה.

ב. אם $f\circ f=g\circ g$ אז גם $f=g$.

<u>הפרכה</u>: נבחר $f(n)=n$ פונקצית הזהות, ו $g(n)=\begin{cases}2 & n=1\\ 1 & n=2\\ n & n>2\end{cases}$.

קל לוודא כי $f\circ f=g\circ g=f$ אך $f\neq g$.

(למעשה כל פונקציה g שהיא ההופכית של עצמה יכלה להתאים כאן.)

ג. אם $f+g$ חח"ע ו g חח"ע אזי גם f חח"ע.

<u>הפרכה</u>: נבחר $g(n)=n$, ואת הפונקציה הקבועה $f(n)\equiv 1$.

$\left(f+g\right)(n)=n+1$ חח"ע, g פונקצית הזהות חח"ע, אך ברור ש f אינה חח"ע.

5. ענו על השאלות הבאות בפירוט:

א. בכמה דרכים ניתן לסדר 4 גברים ו4 נשים בשורה, כך שהנשים צמודות זו לזו?

נצמיד את כל הנשים ונתייחס אליהן כיחידה אחת.

סה"כ עלינו לסדר את יחידת הנשים ו4 גברים, סה"כ יש לנו $5!$ אפשרויות.

לכל סידור שכזה, יש לנו את כל הסידורים האפשריים בתוך יחידת הנשים $4!$,

וסה"כ ביחד כמות הדרכים הינה $4!\cdot 5!$.

ב. בכמה דרכים ניתן ליצור סדרה המכילה 4 אפסים ו4 אחדות?

הסדרה היא באורך 8. מתוך 8 המקומות כל מה שאנו צריכים לעשות זה לבחור 4 מקומות לאחדות.

לכן התשובה היא סה"כ $\binom{8}{4}$.

ג. בכמה דרכים ניתן ליצור סדרה בינארית באורך 8 כך ש1 לעולם לא יופיע מיד אחרי 0?

עלינו לשים לב שברגע שמופיע 0, אחריו הסדרה חייבת להיות קבועה אפס.

כלומר, עלינו לבחור היכן יופיע האפס הראשון של הסדרה. עד אליו יהיו רק אחדות (כי הוא האפס הראשון) ואחריו יהיו רק אפסים (כי אלה תנאי השאלה).

סה"כ יש 8 מקומות כאלה, ועל זה עלינו להוסיף את הסדרה שלא מכילה אפסים בכלל.

לכן התשובה הסופית הינה 9.

המחשה:

$$1,1,1,\ldots,1,1$$
$$0,0,0,\ldots,0,0$$
$$1,0,0,\ldots,0,0$$
$$1,1,0,\ldots,0,0$$
$$\vdots$$
$$1,1,1\ldots,1,0$$

נוסחאות הבחירה:

k מתוך n	עם סדר	בלי סדר
עם חזרה	n^k	$\binom{n-1+k}{n-1}$
בלי חזרה	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$