אנליזה 1 למורים- תרגיל 7

שאלה 1

חשבו את הגבולות החד צדיים הבאים:

א. $\lim_{x\to 6^+} \frac{x^5-14x^4+48x^3}{x^2-12x+36}$

פתרון

$$\lim_{x\to 6^+} \frac{x^5-14x^4+48x^3}{x^2-12x+36} = \lim_{x\to 6^+} \frac{x^3(x^2-14x+48x)}{(x-6)^2} =$$
$$\lim_{x\to 6^+} \frac{x^3(x-6)(x-8)}{(x-6)^2} = \lim_{x\to 6^+} \frac{x^3(x-8)}{(x-6)} = \frac{-432}{0^+} = -\infty$$

ב. $\lim_{x\to 1^+} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\right]$

פתרון

$$\lim_{x\to 1^+} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\right] = \lim_{x\to 1^+} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{2}{(1-x)(1+x)}\right] =$$
$$\lim_{x\to 1^+} \left[\frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)}\right] = \lim_{x\to 1^+} \left[\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}\right] = \lim_{x\to 1^+} \left[\frac{-(1-x)}{(1-x)(1+x)}\right]$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \left[\frac{-1}{(1+x)}\right] = -\frac{1}{2}$$

ג. $\lim_{x\to 2^+} \frac{-x^3+6x^2-8x}{x^2-5x+6}$

פתרון

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{-x^3+6x^2-8x}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-x(x^2-6x+8)}{x^2-5x+6} =$$
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{-x(x-2)(x-4)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-x(x-4)}{(x-3)} = -4$$

ד. $\lim_{x\to 0}\left(e^{x}\right)^{\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)}$ (השתמשו בנוסחה: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$)

פתרון

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{x}\right)^{\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)}=e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)\left(\ln(e^{x})\right)}=e^{\mathrm{im}_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)\left(x\ln(e)\right)}=e^{\mathrm{im}_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)}=e$$

<u>שאלה 2</u>

האם הפונקציה הבאה רציפה ב-0?

אם כן- הוכיחו

אם לא- סווגו את נקודת האי רציפות שלה

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(1-\cos(3x))}{3x^{2}} & x>0\\ 3 & x=0\\ \dfrac{\sin(3x)}{x} & x<0\end{cases}$$

השתמשו ב-2 הנוסחאות הבאות:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

$$\cos(2x)=1-2\sin^{2}(x)$$

פתרון

נחשב את הגבול מימין:

$$\lim_{x\to 0^{+}}\frac{2(1-\cos(3x))}{3x^{2}}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{2\left(2\sin^{2}\left(\frac{3x}{2}\right)\right)}{3x^{2}}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{4\sin^{2}\left(\frac{3x}{2}\right)}{3x^{2}}=$$

$$\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\sin^{2}\left(\frac{3x}{2}\right)}{\frac{3x^{2}}{4}}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\sin^{2}\left(\frac{3x}{2}\right)}{\left(\frac{3x}{2}\right)^{2}\cdot\frac{1}{3}}=\left[\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\left(\frac{3x}{2}\right)}\right]\cdot\left[\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}{\left(\frac{3x}{2}\right)}\right]\cdot\left[\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{1/3}\right]$$

$$=1\cdot 1\cdot 3=3$$

נחשב את הגבול משמאל:

$$\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\sin(3x)}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{3\sin(3x)}{3x}=3$$

הגבולות מימין ומשמאל שווים, ולכן הגבול של הפונקציה ב-0 הוא 3. הגבול של הפונקציה ב-0 שווה לערך הפונקציה ב-0.

ולכן הפונקציה רציפה ב-0

שאלה 3

האם הפונקציה הבאה רציפה ב-0?

אם כן- הוכיחו

אם לא- סווגו את נקודת האי רציפות שלה

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & x>0 \\ 10 & x=0 \\ \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\sin(x)+2 & x<0 \end{cases}$$

פתרון

נחשב את הגבול מימין:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$$

הגבול מימין לא קיים ולכן הפונקציה לא רציפה ב-x=0.

וזו נקודת אי רציפות ממין שני.

שאלה 4

לאילו ערכי a הפונקציה f(x) רציפה ב-x=0? אחרת איזה סוג אי רציפות יש ב-x=0?

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x)-2x}{x} & x\neq 0 \\ a & x=0 \end{cases}$$

השתמשו בנוסחה:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

פתרון

נחשב את הגבול ב-0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-2x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}-2\right)=1-2=-1$$

הגבול קיים ושווה ל: -1 ולכן על מנת שהפונקציה תיהיה רציפה ב-0 נדרוש כי a=-1.

אחרת, אם a שונה מ: -1 אזי זו נקודת אי רציפות סליקה.