בדידה (88195), סמסטר קיץ תשפ"ב, מועד ג'

19.10.2022, כ"ד תשרי התשפ"ג

מרצים: אחיה בר-און, אריאל ויצמן, אלעד עטייא, ארז שיינר
מתרגלים: שחר חנניה, כנה נהיר, גלעד פורת-קורן, עדו פלדמן, הדר קנר, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** השאלות .
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

1. (21 נק') תהיינה A, B, C קבוצות. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $A \setminus B \subseteq A \triangle B$ אז $B \subseteq A$.

(ב) $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$ אם ורק אם $A \triangle B = A \cup B$.

(ג) מתקיים: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

2. (12 נק') לכל n טבעי נגדיר יחס S_n על $P\left(\{1,\ldots,n\}\right)$ כך:

$$S_n = \{(A,B) \mid A \cap B = \emptyset\}$$

הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי $|S_n| = 3^n$.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

3. (32 נק')

(א) תהי A קבוצה, ויהיו R, S יחסי שקילות על A. הוכיחו: $R \cap S$ יחס שקילות על A.

(ב) נגדיר יחס שקילות R על $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ באופן הבא:

$$(x_1, y_2)\, R\, (x_2, y_2) \iff x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

(אין צורך להוכיח שזהו יחס שקילות). לכל $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ קבעו האם עוצמת מחלקת השקילות $[(x, y)]_R$ היא סופית, $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}$ או אחרת. אם היא סופית, מצאו אותה. חלקו למקרים אם צריך.

(ג) נגדיר יחס שקילות S על $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ באופן הבא:

$$(x_1, y_2)\, S\, (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2$$

(אין צורך להוכיח שזהו יחס שקילות). לכל $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ קבעו האם עוצמת מחלקת השקילות $[(x, y)]_S$ היא סופית, $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}$ או אחרת. אם היא סופית, מצאו אותה. חלקו למקרים אם צריך.

(ד) נתבונן ביחס השקילות $R \cap S$ (עבור היחסים R, S משני הסעיפים הקודמים) על $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. לכל $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ קבעו האם עוצמת מחלקת השקילות $[(x, y)]_{R \cap S}$ היא סופית, $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}$ או אחרת. אם היא סופית, מצאו אותה. חלקו למקרים אם צריך.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

4. פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ תיקרא מזגזגת אם מתקיים: לכל n זוגי $f(n)<f(n+1)$, ולכל n אי-זוגי $f(n)>f(n+1)$.

(א) (5 נק') הוכיחו: $f(1)\neq 1$.

(ב) (8 נק') הוכיחו: קיימת $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מזגזגת והפיכה.

(ג) (12 נק') נסמן ב- X את קבוצת הפונקציות מהטבעיים לטבעיים המזגזגות (כלומר, $X=\left\{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\mid \text{מזגזגת } f\right\}$). קבעו האם עוצמת הקבוצה X היא סופית, $\aleph_0$, $\aleph$, $2^{\aleph}$ או אחרת. אם היא סופית, מצאו אותה.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

5. (20 נק') קבוצה של קבוצות $X \in P\left(P(\mathbb{N})\right)$ תיקרא ריקה באופן בכללי אם מתקיימים התנאים הבאים:
   1. $X \neq \emptyset$.
   2. לכל $A, B \in X$ מתקיים $A \cap B \neq \emptyset$.
   3. $\bigcap\limits_{A \in X} A = \emptyset$.

(במילים: X הוא אוסף לא ריק של קבוצות, החיתוך בין כל שתי קבוצות לא ריק, אבל החיתוך הכללי על כל הקבוצות ב-X ריק).

(א) תהי X ריקה באופן כללי, הוכיחו: $|X| \geq 3$.

(ב) תהי X ריקה באופן כללי מקסימלית ביחס ההכלה, הוכיחו כי $\mathbb{N} \in X$.

(ג) תהי X ריקה באופן כללי מקסימלית ביחס ההכלה, הוכיחו כי לכל $A \subseteq \mathbb{N}$ מתקיים כי $A \in X$ או $\mathbb{N} \setminus A \in X$.

(ד) הוכיחו כי קיימת קבוצה ריקה באופן כללי, מקסימלית ביחס ההכלה.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___