מבנים אלגבריים*

תרגיל בית 4†

תזכורות ומושגים

- סדר של איבר g בחבורה G הוא המספר הטבעי המינימלי n המקיים $g^n = e$. אם אין טבעי שכזה, אז הסדר הוא אינסוף.
- ת"ח (=תת חבורה) H של חבורה G היא תת־קבוצה לא ריקה של G כך שביחס לפעולה של G, H היא חבורה בפני עצמה. מסמנים זאת על ידי $H \leq G$.
- לכל חבורה G מתקיים $G \leq G$ וגם $\{e\} \leq G$. לתת־חבורות אלו קוראים ת"ח טריוויאליות של G.
- קריטריון לת"ח: תהי G חבורה, ותהי $\varnothing \neq H \subseteq G$. $H \leq G$ א.ס.ם. לכל $g, h \in H$ מתקיים $gh \in H$ וגם $g^{-1} \in H$.

שאלה 1 נביט בחבורה הציקלית הנוצרת על ידי $\mathrm{cis}10^\circ = \cos 10^\circ + i \sin 10^\circ$ בתוך החבורה הכפלית $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. מה הסדר של החבורה $\langle \mathrm{cis}10^\circ \rangle$?

רמז השתמשו במשפט דה־מואבר.

פתרון מתקיים

$$(\mathrm{cis}10^\circ)^{36} = \mathrm{cis}360^\circ = 1$$

חזקות נמוכות יותר לא יתנו את היחידה, ולכן הסדר של איבר זה הוא 36. אם כן, $|\langle \mathrm{cis}10^\circ \rangle| = |\mathrm{cis}10^\circ| = 36$. ■

שאלה 2 מצאו את כל התת־חבורות ב־$(\mathbb{Z}_{24}, +)$.

*נא לרשום על התרגיל את שם התלמיד, מספר זיהוי ומספר קבוצה.

†יש להגיש בשיעור התרגיל בפרשת מקץ:
קבוצה 03 – הגשה בשיעור ביום שני, כ"ב בכסלו (25 נוב').
קבוצות 04, 05 – הגשה בשיעור ביום חמישי, כ"ה בכסלו (28 נוב').
קבוצה 06 – הגשה בשיעור ביום חמישי שאחריו, ב' בטבת (5 דצמ'), יחד עם תרגיל בית 5.

פתרון דרך א': זו חבורה ציקלית, הנוצרת על ידי 1. לכן כל הת"ח הן ציקליות. נחשב את הת"ח הנוצרת על ידי כל איבר, ונמחק חבורות שנתקבלו יותר מפעם אחת. בסיכום נקבל את הת"ח הבאות:

$$\begin{aligned}\langle 0\rangle &= \{0\}\\ \langle 1\rangle &= \mathbb{Z}_{24}\\ \langle 2\rangle &= \begin{Bmatrix}0,2,4,6,8,10,12\\ 14,16,18,20,22\end{Bmatrix}\\ \langle 3\rangle &= \{0,3,6,9,12,15,18,21\}\\ \langle 4\rangle &= \{0,4,8,12,16,20\}\\ \langle 6\rangle &= \{0,6,12,18\}\\ \langle 8\rangle &= \{0,8,16\}\\ \langle 12\rangle &= \{0,12\}\end{aligned}$$

דרך ב': לפי משפט משיעור התרגיל, לחבורה ציקלית סופית יש ת"ח יחידה מכל סדר שמחלק את סדר החבורה. לפי הפתרון שהוצג בשיעור, אם g הוא היוצר של החבורה, ו־n הוא הסדר שלה, אז כל ת"ח נוצרת על ידי g^m עבור $n \mid m$. מחלקי 24 הם $1,2,3,4,6,8,12,24$, וכך מגיעים לרשימה שכתבנו לעיל (כאשר $0 \equiv_{24} 24$, ולכן $\langle 24\rangle = \langle 0\rangle$). ■

שאלה 3 יהי $\mathbb{F}$ שדה. אנחנו סימנו בשיעור התרגיל על ידי $GL_n(\mathbb{F})$ את החבורה הלינארית הכללית, קבוצת המטריצות ההפיכות מגודל $n \times n$ מעל השדה $\mathbb{F}$. הראנו כי $(GL_n(\mathbb{F}), \cdot)$ היא חבורה (הנקודה מסמנת כפל מטריצות). נסמן על ידי

$$SL_n(\mathbb{F}) = \{A \in GL_n(\mathbb{F}) :\ \det(A) = 1\}$$

את החבורה הלינארית המיוחדת, חבורת המטריצות עם דטרמיננטה 1. הראו כי $SL_n(\mathbb{F}) \leq GL_n(\mathbb{F})$.

פתרון הקבוצה $SL_n(\mathbb{F})$ איננה ריקה, כי מטריצת היחידה שייכת אליה. לכן ניתן להשתמש בקריטריון לת"ח:

- יהיו $A, B \in SL_n(\mathbb{F})$. אזי $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B) = 1\cdot 1 = 1$, ולכן $AB \in SL_n(\mathbb{F})$.
- תהי $A \in SL_n(\mathbb{F})$. אזי $\det\left(A^{-1}\right) = (\det(A))^{-1} = 1^{-1} = 1$, ולכן $A^{-1} \in SL_n(\mathbb{F})$.

לפיכך הראנו כי $SL_n(\mathbb{F})$ מקיימת את הקריטריון לת"ח, ולכן $SL_n(\mathbb{F}) \leq GL_n(\mathbb{F})$. ■

שאלה 4 נסמן

$$G = \left\{ \begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{Z}_3) : a,b,c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$$

קבוצת מטריצות מעל השדה $\mathbb{Z}_3$.

1. הראו כי G עם פעולת כפל מטריצות היא חבורה.

   רמז היא תת־חבורה של $GL_3\left(\mathbb{Z}_3\right)$.

2. חשבו את סדר החבורה. הראו כי הסדר של כל איבר שאיננו מטריצת היחידה הוא 3.

3. תהי H חבורה המקיימת לכל $g,h\in H$, $\left(gh\right)^3=g^3h^3$. מצאו דוגמא בה H איננה אבלית.

4. תהי H חבורה המקיימת לכל $g,h\in H$, $\left(gh\right)^2=g^2h^2$. הסיקו כי H אבלית.

פתרון

1. נשתמש בקריטריון לת"ח: G איננה ריקה, בדיקה ידנית מראה סגירות לכפל ולהפיך.

   הערה ניתן להסתפק בסגירות לכפל. מכיוון ש־$GL_3\left(\mathbb{Z}_3\right)$ היא חבורה סופית, כל איבריה הם מסדרים סופיים. לכן $A^{-1}=A^{n-1}$ עבור n טבעי כלשהו. לפי סגירות לכפל, $A^{n-1}\in G$.

2. יש לנו שלושה ערכים לבחור בכל מטריצה: a,b,c. לכל אחד מהם יש שלוש אפשרויות: $0,1,2$. לכן בסך הכל יש לנו $3^3=27$ אפשרויות, ולפיכך $|G|=27$. כמובן, מטריצת היחידה היא ורק היא מסדר 1. תהי $A\in G$ מטריצה שאיננה מטריצת היחידה. נראה כי $A^2\neq I$ אבל $A^3=I$:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
A^2 &= \begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2a & 2b+ac\\ 0 & 1 & 2c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
A^3 &= \begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2a & 2b+ac\\ 0 & 1 & 2c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3a & 3\left(b+ac\right)\\ 0 & 1 & 3c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

   כעת, הראנו כי $A^3=I$. אם גם $A^2=I$ אז $A^{-2}=I$, וביחד יתקיים $A=A^{3-2}=A^3\cdot A^{-2}=I\cdot I=I$, ובסתירה להנחה ש־$A$ איננה מטריצת היחידה.
   לסיכום, הראנו כי הסדר של כל מטריצה הוא 1 או 3.

3. החבורה G מקיימת את התנאי $\left(gh\right)^3=g^3h^3$, כי כל איבר ב־G הוא מסדר 3, ולכן שני האגפים כאן הם מטריצת היחידה. מנגד, G איננה אבלית.

4. תהי H כאמור. אזי מתקיים לכל $g,h\in H$

$$
\begin{aligned}
\left(gh\right)^2 &= g^2h^2\\
ghgh &= gghh \qquad /g^{-1}\left(*\right)h^{-1}\\
hg &= gh
\end{aligned}
$$

   הכפלנו כאן את המשוואה ב־g^{-1} משמאל וב־h^{-1} מימין. אם כן, מצאנו שלכל $g,h\in H$, מתקיים $gh=hg$, ולכן H אבלית. ■

שאלה 5

1. נביט בחבורה $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, עם פעולת החיבור מודולו 2 הפועלת רכיב־רכיב. מצאו את כל התת־חבורות הציקליות שלה.
2. הראו כי לחבורה G יש 3 תת־חבורות לא טריוויאליות A, B, C המקיימות $A \cup B \cup C = G$.
3. תהי G חבורה. הוכיחו כי G איננה איחוד של שתי תת־חבורות לא טריוויאליות שלה. דהיינו, אם H, K ת"ח המקיימות $\{e\} < H, K < G$, אז $G \neq H \cup K$.

   רמז בדקו מה קורה כשמכפילים איבר מ־H באיבר מ־K.

פתרון

1. נרשום את כל איברי החבורה:

$$G = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

כעת, ננסה לראות איזו חבורה ציקלית יוצר כל איבר מאיברי G, ונמחוק כפילויות:

$$\begin{aligned} \langle(0,0)\rangle &= \{(0,0)\} \\ \langle(0,1)\rangle &= \{(0,0), (0,1)\} \\ \langle(1,0)\rangle &= \{(0,0), (1,0)\} \\ \langle(1,1)\rangle &= \{(0,0), (1,1)\} \end{aligned}$$

מצאנו אם כן שכל איבר יוצר ת"ח ציקלית שונה.

2. מתקיים

$$\langle(0,1)\rangle \cup \langle(1,0)\rangle \cup \langle(1,1)\rangle = G$$

3. תהי G חבורה, ותהיינה $\{1\} < H, K < G$ ת"ח לא טריוויאליות שלה. נניח בשלילה כי $H \cup K = G$. ניקח $h \in H \setminus K$ ו־$k \in K \setminus H$, ונביט באיבר $hk \in G = H \cup K$. נבדוק האם $hk \in H$ או $hk \in K$. אם $hk \in H$, אז גם $k = h^{-1}hk \in H$, ובסתירה לכך ש־$k \notin H$. אם $hk \in K$, אז גם $h = hkk^{-1} \in K$, ובסתירה לכך ש־$h \notin k$. לפיכך $hk \notin H \cup K$, ובסתירה לכך ש־$H \cup K = G$, כנדרש.

הערה שימו לב. אנחנו הנחנו כאן ש־$H \setminus K$ ו־$K \setminus H$ לא ריקים. אחרת, היה מתקיים $K \subseteq H$ או $H \subseteq K$ (בהתאמה), ואז $H \cup K = K$ או $H \cup K = H$ (בהתאמה). אבל אנחנו דרשנו בשאלה ש־H ו־K ת"ח לא טריוויאליות, ובפרט $H \neq G$, $K \neq G$, ובסתירה להנחה $H \cup K = G$. ■

שאלה 6 אם $h \in H \leq G$, אז הסדר של h בחבורה H שווה לסדר שלו ב־G.

פתרון נביט ב־$\langle a\rangle = \{a^n | n\in\mathbb{Z}\}$. זו תת־חבורה של H, ולכן גם תת־חבורה של G. $\langle a\rangle \subseteq H\cap G$, ולכן לא יכול להיות שקיים n_G כך שב־G $a^{n_G}=1$ אבל לא ב־H או להיפך. מכאן עולה כי כל הפתרונות של המשוואה $a^n=1$ הם זהים, בין אם נעבוד ב־H או ב־G. בפרט הפתרון החיובי־ממש הנמוך ביותר הוא זהה, ולכן הסדר שווה. ■

טעויות חוזרות

בפתרון התרגיל נצפו מספר טעויות חוזרות. להלן פירוט של חלקן:

שאלה 1

- נטען כי $(\text{cis}10°)^{36}=1$, ולכן הסדר הוא 36.
  הטעות: יש לציין בפירוש כי אין חזקה נמוכה יותר שתקיים $(\text{cis}10°)^n=1$.

- נטען כי אין עוד פתרונות למשוואה $(\text{cis}10°)^n=1$.
  הטעות: במספרים השלמים הפתרונות הם $36\cdot\mathbb{Z}=\{0,\pm36,\pm72,\ldots\}$. אם אנו מגבילים את עצמנו רק לטבעיים, כמתבקש משאלה על סדר איבר, אז יש לקחת רק את החלק החיובי. בכל אופן, יש אינסוף פתרונות למשוואה, ואנו מחפשים את הטבעי המינימלי התואם.

שאלה 3

- נעשה שימוש בקריטריון לתת־חבורות ללא הוכחה ש־SL_n לא ריקה.
  הטעות: בקריטריון לתת־חבורות יש לציין בפירוש כי H איננה ריקה; אחרת יתקבל כי $\varnothing$ היא חבורה, למרות שאיבר היחידה לא שייך אליה.

- נטען כי SL_n היא אוסף המטריצות המשולשיות העליונות כך שאיברי האלכסון הם 1.
  הטעות: זהו בלבול עם חבורה משאלה אחרת. שימו לב להגדרת בשאלה.

- נעשה שימוש בניסוח שגוי לקריטריון המקוצר לתת־חבורות: נניח כי $g,h^{-1}\in H$. נראה כי גם $gh^{-1}\in H$, ולכן H ת"ח.
  הטעות: הקריטריון המקוצר לת"ח דורש להוכיח כי $gh^{-1}\in H$ בהינתן $g,h\in H$, ובכך יש סגירות לכפל ולהופכי, ולא בהינתן $g,h^{-1}\in H$. הניסוח השגוי מוכיח סגירות לכפל בלבד, ולא סגירות להופכי. זו דוגמא לשאלה שבה הקריטריון המקוצר מאריך את הפתרון, ויותר נוח להשתמש בקריטריון הרגיל (שמראה סגירות לכפל ולהופכי בנפרד).

שאלה 5

- בסעיף א', חושבה החבורה הציקלית הנוצרת על ידי איבר, נניח $\langle(1,0)\rangle$. לאחר החישוב הוכח שזו אכן חבורה.
  הטעות: הראנו כבר ש־$\langle g\rangle$ היא חבורה, לכל $g\in G$ כאשר G חבורה. לכן הבדיקה הזו מיותרת.

- בסעיף ג', לא נרשם בפירוש הטיעון שהופיע אצלנו בהערה.

- בסעיף ג', נבחרו $h \in H \setminus K$ ו־$k \in K \setminus H$, כפי שמופיע בפתרון. נטען שאם נניח $hk \in H$ אז גם $k \in H$, וכך מגיעים לסתירה. הנימוק של המעבר האחרון היה שהפעולה סגורה ב־H.
<u>הטעות</u>: סגירות הפעולה יכולה להקים טיעון בכיוון ההפוך בלבד: אם $a, b \in L$ אז גם $ab \in L$. הטיעון שרוצים להשתמש בו כאן הוא קיום הופכי ל־h ב־H, ואז סגירות לפעולה. כך, אצלנו $h, hk \in H$, ולכן גם $h^{-1} \in H$, ובגלל סגירות גם $k = h^{-1}(hk) \in H$. הטעות היא בנימוק.