

תרגיל 10 בפונקציות מרוכבות

1. תהינה $f_1(z), \dots, f_m(z)$ מספר סופי של פונקציות אנליטיות ב $A = \{z \mid |z| < 1\}$ ונתון כי לכל $z \in A$

$$f_1(z) \cdots f_m(z) = 0$$

הוכיחו כי לפחות אחת מהפונקציות האלה היא פונקצית האפס.

2. מצאו את כל הפונקציות השלמות המקימות $f(f(z)) = f(z)$.

3. נניח כי הפונקציות $f(z), g(z), r(z), h(z)$ אנליטיות בסביבה מנוקבת של z_0 . בנוסף נתון כי ב z_0 יש ל f קוטב מסדר 2 ל g יש אפס מסדר 3, ל $r(z)$ אפס מסדר 2 ול $h(z)$ אפס מסדר 1. מהו סוג הסינגולריות ב z_0 של:

$$\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)} \quad (\text{א})$$

$$\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)} \quad (\text{ב})$$

4. הסבירו מדוע $z_0 = 1$ היא קוטב של הפונקציה

$$f(z) = \frac{\sin^3(z-1)}{(\text{Log } z)^4(1 - \cos(z-1))^2}$$

ומצאו את סדר הקוטב.

5. (א) תהי z_0 קוטב של $f(z)$. איזה סינגולריות יש ל $\frac{1}{f(z)}$ בנקודה z_0 ?

(ב) תהי z_0 סינגולריות סליקה של $f(z)$. איזה סינגולריות יש ל $\frac{1}{f(z)}$ בנקודה z_0 ? (רמז: יש להפריד למקרים)