

תרגיל 2 - אנליזה פונקציונלית

6 בנובמבר 2018

הנחיות: יש לפתור 3 תרגילים מחלק א' ו-3 תרגילים מחלק ב'. פתרון של השאלה הראשונה בחלק ב', משקלה כתרגיל שלם. מותר להשתמש בכל מה שאתם יודעים מקורסים הקודמים. כאשר ההוכחות בסעיפים שונים זהים או דומים - מותר לומר שזה דומה או זהה (בהנחה שזה נכון ושעשיתם את ההוכחה שאתם משתמשים בה נכון...).

1 קבוצות פתוחות וסגורות

1.1 רקע

נזכיר את המושגים המרכזיים.

הגדרה 1.1 יהי V מרחב נורמי, תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב V . יהי $a \in V$. נאמר ש $\{a_n\}$ מתכנסת ל a אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שאם $n > N$ אזי $\|a_n - a\| < \epsilon$ ונסמן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

או

הגדרה 1.2 יהי V מרחב נורמי. $X \subseteq V$ נקראת קבוצה פתוחה ב V אם לכל $x \in X$ קיים r כך ש $B(x, r) \subseteq X$. אומרים ש $X \subseteq V$ קבוצה סגורה ב X , אם $V \setminus X$ היא קבוצה פתוחה ב V .

הגדרה 1.3 יהי V מרחב וקטורי, $X \subseteq V$. עבור $a \in V$ נאמר ש a היא נקודת גבול של X אם קיימת סדרה של איברי X , $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

משפט 1.4 קבוצה X סגורה אם ורק אם לכל נקודת גבול a של X , מתקיים $a \in X$.

הגדרה 1.5 יהי V מרחב נורמי, ו $X \subseteq V$. עבור $A \subseteq X$ נאמר ש A פתוחה ב X אם ורק אם לכל $a \in A$ קיים $0 < r$ כך ש $B(a, r) \cap X \subseteq A$. נאמר ש $A \subseteq X$ סגורה ב X אם $X \setminus A$ פתוחה ב X . שימו לב - ההגדרה האחרונה חדשה ואותה לא הכרתם.

1.2 שאלות

1. יהי V מרחב וקטורי ו $X \subseteq V$. הראו שהתנאים הבאים שקולים.

(א) X פתוחה ב V .

(ב) קיים אוסף של כדורים פתוחים $\{B(a, r_a)\}_{a \in A}$ כך ש $X = \cup_{a \in A} B(a, r_a)$. (במילים אחרות X היא איחוד של כדורים פתוחים).

(ג) קיים אוסף של קבוצות פתוחות $\{U_i\}_{i \in I}$ כך ש $X = \cup_{i \in I} U_i$. (במילים אחרות X היא איחוד של קבוצות פתוחות).

2. יהי V מרחב וקטורי, $X \subseteq V$. הראו שהתנאים הבאים שקולים.

(א) X סגורה ב V .

(ב) קיים אוסף של קבוצות סגורות $\{U_i\}_{i \in I}$ כך ש $X = \cap_{i \in I} U_i$.

3. עבור הקבוצות הבאות קבעו אם הן פתוחות או סגורות. (ייתכן קבוצה היא לא פתוחה ולא סגורה).

(א)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

(ב)

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$$

(ג)

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1\right]$$

(ד) קבוצה בעלת איבר בודד כלשהו במרחב נורמי.

4. הוכיחו או הרפיכו את הטענות הבאות. יהי V מרחב מטרי.

(א) אם $\{A_k\}_{k=1}^n$ הוא אוסף של קבוצות פתוחות, אזי $\bigcap_{k=1}^n A_k$ הוא פתוחה.

(ב) אם $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ הוא אוסף של קבוצות פתוחות, אזי $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ היא פתוחה.

(ג) אם $\{A_k\}_{k=1}^n$ הוא אוסף של קבוצות סגורות, אזי $\bigcup_{k=1}^n A_k$ היא סגורה.

(ד) אם $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ הוא אוסף של קבוצות סגורות, אזי $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ היא סגורה.

(הדרכה: ניתן להשתמש בשאלה הקודמת ובעובדה ש $(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$ כאשר A^c הוא המשלים של A .)

5. יהי V מרחב לינארי, $a \in V$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב V . הראו שהטענות הבאות שקולות:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad (\text{א})$$

- (ב) לכל כדור פתוח $B(a, r)$ (כדור ברדיוס r עם מרכז a) קיים N כך שלכל $N < n$ מתקיים $a_n \in B(a, r)$.
 (ג) לכל קבוצה פתוחה U שמכילה את a קיים N כך שלכל $n < N$ מתקיים $a_n \in U$.

6. יהי V מרחב נורמי ו $X \subseteq V$.

- (א) הראו ש A פתוחה ב X אם ורק אם קיימת N פתוחה ב V כך ש $N \cap X = A$.
 (ב) הראו ש A סגורה ב X אם ורק אם קיימת N סגורה ב V כך ש $N \cap X = A$.
 (ג) הראו ש X תמיד פתוחה וסגורה ב X .
 (ד) הראו ש \emptyset (הקבוצה הריקה) תמיד פתוחה וסגורה ב X .

7. הוכיחו או הטענות הבאות:

- (א) (a, b) הוא קבוצה פתוחה ב \mathbb{R} אך לא ב \mathbb{R}^2 , כאשר \mathbb{R} ו \mathbb{R}^2 הם צירי x .
 (ב) יהי V מרחב נורמי, $X \subseteq V$. אזי $A \subseteq X$ פתוחה ב X אם ורק אם היא פתוחה ב V .
 (ג) יהי V מרחב נורמי, $X \subseteq V$. אזי $A \subseteq X$ סגורה ב X אם ורק אם היא פתוחה ב V .
 (ד) יהי V מרחב נורמי, $X \subseteq V$ פתוחה ב V . אזי אם $A \subseteq X$ סגורה ב X היא סגורה ב V .

8. יהי $C[-\pi, \pi]$ רציפות (שמקבלות ערכים מרוכבים) על הקטע $[-\pi, \pi]$ ויהי T התת-מרחב הנפרש על ידי הקבוצה $\{e^{inx}\}_{-\infty < n < \infty}$. (שימו לב שהקבוצה כוללת גם את הפונקציה הקבועה 1 שכן, $e^{0x} = 1$ באופן זהותי).

(א) הראו שהפונקציה $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$ מהווה מכפלה פנימית על $C[-1, 1]$.

(ב) הראו שהפונקציה $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ מהווה נורמה (מותר לחפף ולהגיד שכל מכפלה פנימית משרה נורמה...)

(ג) הראו שהקבוצה $\{e^{inx}\}_{-\infty < n < \infty}$ היא קבוצה אורתונורמלית ב $C[-\pi, \pi]$.

(ד) הראו שלכל $f \in \text{span}\{e^{inx} | n \in \mathbb{Z}\}$ מתקיים

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle f, e^{inx} \rangle e^{inx}$$

(שימו לב שיש מספר סופי של גורמים בסכימה שלא מתאפסים (למה?). כמו כן - אפשר לנמק בקצרה בטיעונים על מערכות אורתונורמליות).

(ה) חשבו את $\langle x^2, e^{inx} \rangle$ לכל n .

(ו) נסמן $a_n = \langle x^2, e^{inx} \rangle$. נסמן

$$A_n = \sum_{m=-n}^n a_m e^{imx}$$

הראו ש $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = x^2$. (הערה - מותר להשתמש כאן בטענות על טורי פורייה מהקורסים הקודמים, אם אתם זוכרים אותם כמובן).

(ז) הראו ש x^2 הוא לא ב $\text{span}\{e^{inx} | n \in \mathbb{Z}\}$. (כלומר, שלא ניתן לבטא אותו כצירוף סופי של e^{inx}). (יש כמה דרכים - אבל אתם יכולים להשתמש במשפט ממרוכבות על פונקציות אנליטיות שמתלכדות על קבוצה קטע).

(ח) הסיקו ש $\text{span}\{e^{inx} | n \in \mathbb{Z}\}$ אינה סגורה ב $C[-1, 1]$.

2 קומפקטיות

2.1 רקע והגדרות

הגדרה 2.1 יהי V מרחב וקטורי. נאמר ש $X \subseteq V$ היא קבוצה קומפקטית אם ורק אם לכל סדרה של $\{a_n\}$ ב X , קיימת תת-סדרה מתכנסת ל $a \in X$.

הגדרה 2.2 יהי V מרחב וקטורי. יהי $X \subseteq V$. נאמר ש $\{U_i\}_{i \in I}$ הוא כיסוי פתוח של X אם

1. לכל $i \in I$, U_i פתוחה ב V .

2. $X \subseteq \cup_{i \in I} U_i$.

אם $J \subseteq I$ נאמר ש $\{U_j\}_J$ הוא תת-כיסוי פתוח של X .

משפט 2.3 חיתוך של קבוצה סגורה וקומפקטית הוא קומפקטי.

משפט 2.4 אם $f : X \rightarrow Y$ רציפה ו X קומפקטית, אזי $f(X)$ קומפקטית.

משפט 2.5 תהי $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ו X קומפקטית. אזי f מקבלת מינימום ומקסימום על X . קבוצה $X \subseteq V$ היא קומפקטית אם ורק אם לכל תת-כיסוי פתוח של X קיים תת-כיסוי סופי של X .

1. בתרגיל הזה נוכיח את המפשט האחרון בצורה מודרכת.

(א) נראה שאם לכל כיסוי פתוח של X קיים כיסוי סופי, אז לכל סדרה יש תת-סדרה מתכנסת לאיבר ב X .

- i. הראו שאם ל $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש תת-סדרה שמתכנסת ל a , אזי לכל $r > 0$, קיימים אינסוף k כך ש $a_k \in B(a, r)$.
- ii. הסיקו שאם ל $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אין תת-סדרה מתכנסת לאיבר $a \in X$, אזי לכל $a \in X$ קיים r כך ש $B(a, r_a)$ מכיל לכל היותר מספר סופי של k כך ש $a_k \in B(a, r_a)$.
- iii. הראו ש $B(a, r_a)$ הוא כיסוי פתוח של X .
- iv. השתמשו בקיום של תת-כיסוי סופי, והראו ש X יש לכל היותר מספר סופי של k כך ש $a_k \in X$ וקבלו סתירה.

(ב) נראה שאם X קומפקטית, אזי לכל כיסוי קיים תת-כיסוי סופי.

- i. יהי $x_1 \in X$ ו $r > 0$. נניח שבחרנו x_1, \dots, x_n נבחר x_{n+1} כך ש $\|x_{n+1} - x_i\| > r$ לכל $1 \leq i \leq n$. הראו שהתהליך חייל לעצור לאחר מספר סופי של צעדים.
- הדרכה: הראו שאם התהליך לא עוצר אזי קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש $\|x_i - x_j\| > r$ לכל $i \neq j$. הראו שלסדרה הזאת אין תת-סדרה מתכנסת וקבלו סתירה להנחה.
- ii. הסיקו שלכל $r > 0$ קימת קבוצה סופית $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq X$ כך ש

$$X = \bigcup_{i=1}^n B(a_i, r)$$

iii. הסיקו שלכל n קיימת קבוצה סופית $A_n = \{a_{n1}, \dots, a_{ni_n}\}$ כך ש

$$X = \bigcup_{j=1}^{i_n} B\left(a_{nj}, \frac{1}{n}\right)$$

- iv. הראו ש $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ הוא בן מניה.
- v. נסמן $\mathcal{B} = \{B(a, \frac{1}{n}) \mid \exists m > 0 : m = n \wedge a \in A_n\}$. הראו ש \mathcal{B} אף היא בת מניה.
- vi. תהי U קבוצה פתוחה. הראו שלכל $x \in U$ קיים n ו $a \in A_n$ כך ש $B(a, \frac{1}{n}) \subseteq U$ ו $x \in B(a, \frac{1}{n})$.
הדרכה: מכיון ש U פתוחה ו $x \in U$ קיים $r > 0$ כך ש $B(x, r) \subseteq U$. הראו שאם $\|y - x\| < \frac{r}{2}$ אזי $B(y, s) \subseteq B(x, r)$ לכל $s < \frac{r}{2}$. קחו n כך ש $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$ והראו שקיים $a \in A_n$ כך $x \in B(a, \frac{1}{n})$.
- vii. הסיקו שכל קבוצה פתוחה ב $U \subseteq X$ ניתן להציג כאיחוד של קבוצות בנות מניה, או במילים אחרות שכל קבוצה פתוחה ב U היא איחוד של איברי \mathcal{B} .
- הדרכה: בעזרת הסעיף הקודם, לכל $x \in A$ קיימים $a(x), n(x)$ כך ש $a(x) \in A_n$ ו $x \in B(a(x), \frac{1}{n(x)}) \subseteq X$.
הראו הכלה דו־כיוונית והשתמשו בעובדה שיש לכל היותר מספר בן־מניה של כדורים כאלה (מסעיפים הקודמים).
- viii. יהי $\{U_i\}_{i \in I}$ כיסוי פתוח של X . נגדיר פונקציה

$$\phi : \mathcal{B} \rightarrow \{U_i \mid i \in I\} \cup \{\emptyset\}$$

- באופן הבא. אם קיים $i \in I$ כך ש $B \subseteq U_i$, נבחר אחד כזה ו $\phi(B) = U_i$. הראו שהתמונה של ϕ היא בת מניה.
- הדרכה: תמונה של קבוצה בת־מניה היא בת־מניה. כמו כן, הזכרו שכל $B \in \mathcal{B}$ הוא כדור פתוח וכל קבוצה פתוחה ב X היא איחוד של איברי \mathcal{B} (שמן הסתם מוכלים בה).
- ix. הראו

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \phi(B) = X$$

- הדרכה: מראים הכלה דו־כיוונית. כיוון אחד של הכלה ברור ברור, שכן כל איבר B הוא איבר X . מצד שני לכל $x \in X$ קיים $i \in I$ כך ש $x \in U_i$ (לפי הגדרה של כיסוי פתוח). לפי הסעיפים הקודמים קיים $B \in \mathcal{B}$ כך ש $x \in B \subseteq \mathcal{B}$. אבל $B \subseteq \phi(B)$ ולכן $x \in \phi(B)$.
- x. עכשו הניחו שיש כיסוי פתוח $\{U_i\}_{i \in I}$ של X שאין לו תת־כיסוי פתוח סופי. בעזרת הסעיפים הקודם הראו שיש לו תת־כיסוי ב"מ $\{U_{i_n}\}_{n=1}^{\infty}$. הראו שלכל n מתקיים

$$X \not\subseteq \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$$

וקיים a_{n+1} כך ש

$$a_{n+1} \notin \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$$

- במילים אחרות הראו שקיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שלכל $k < n$ מתקיים $a_n \notin U_k$.
- xi. הראו שלתת סדרה שבניתם בסעיף הקודם קיימת תת־סדרה מתכנסת. ל $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ל $a \in X$.
- xii. הראו שקיים m כך $a \in U_m$ ו N כך שלכל $k > N$, $a_{n_k} \in U_m$. (השתמשו באחד מהתנאים השקולים להתכנסות).
- xiii. הראו שיש סתירה בן איך שבנינו את הסדרה.

2. תהי X קבוצה קומפקטית. תהי $V \subseteq X$ קבוצה סגורה ב X . הראו ש V קומפקטית. (רמז: השתמשו בטענה שהוכחנו בתרגול על חיתוך של קומפקטית וסגורה).

3. יהי V מרחב נורמי, $X \subseteq V$ סגורה, $v \in V$. נגדיר מרחק בין v ל X
 $\text{dist}(v, X) = \min_{x \in X} \|x - v\|$

(א) הראו שהמרחק מוגדר היטב. (כלמר שהמינימום מתקבל)

(ב) הראו שהפונקציה $d(v) = \text{dist}(v, X)$ רציפה.

(ג) תהי Y קומפקטית. נגדיר $\text{dist}(Y, X) = \min_{y \in Y} \text{dist}(y, X)$. הראו שהרחק מוגדר היטב.

4. יהי V מרחב נורמי, ויהי $\{U_i\}_{i \in I}$ אוסף של קבוצות קומפקטיות שאינן ריק. נניח שלכל i_1, \dots, i_n מתקיים

$$\bigcap_{k=1}^n U_{i_k} \neq \emptyset$$

הראו ש

$$\bigcap_{i \in I} U_i \neq \emptyset$$

הדרכה: נבחר U_t באופן אקראי.

(א) הראו שלכל $i, i \in I$, $U_i \cap U_t$ קומפקטית וסגורה ב U_t .

(ב) הראו ש

$$U_t \cap \left(\bigcap_{i \in I, i \neq t} U_i \right) = \left(\bigcap_{i \in I, i \neq t} U_t \cap U_i \right) = \bigcap_{i \in I, i \neq t} U_i$$

(ג) הסיקו שאם החיתוך ריק, אזי

$$U_t = U_t \cap \left(\bigcap_{i \in I, i \neq t} U_i \right)^c = U_t \cap \left(\bigcup_{i \in I, i \neq t} U_i^c \right) = \bigcup_{i \in I, i \neq t} U_t \cap U_i^c$$

ושהקבוצה $\{U_i^c \cap U_t\}_{i \in I, i \neq t}$ היא כיסוי פתוח של U_t .

(ד) הראו שקיימים i_1, \dots, i_n כך ש

$$U_t = \bigcap_{k=1}^n U_t \cap U_{i_k}^c$$

(ה) הראו ש

$$U_t \cap \bigcap_{k=1}^n U_{i_k} = \emptyset$$

והראו שיש סתירה להנחה.

5. יהיו $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ קבוצות כך שכל n , מתקיים $V_{n+1} \subseteq V_n$ ושלכל n , V_n הוא איחוד סופי של קטעים סגורים. הראו ש

$$\bigcap_{n=1}^\infty V_n \neq \emptyset$$