

תרגיל בית 1 – טופולוגיה

שאלה 1

תזכורת: תהי $f: X \rightarrow Y$ פונקציה כלשהי. יהיו $A \subseteq X, B \subseteq Y$ תת קבוצות. אזי "התמונה של A " היא: $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$; ו"התמונה ההפוכה של B " היא: $f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

תהי $f: X \rightarrow Y$. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. $A \subseteq Y$ לכל $f(f^{-1}[A]) \subseteq A$.

ב. אם f על אזי $f(f^{-1}[A]) = A$. תנו דוגמא נגדית במקרה בו f לא על.

ג. $B \subseteq X$ לכל $f^{-1}[f(B)] \supseteq B$.

ד. אם f חח"ע אזי $f^{-1}[f(B)] = B$ לכל $B \subseteq X$. תנו דוגמא נגדית במקרה בו f אינה חח"ע.

שאלה 2

תהי $f: X \rightarrow Y$.

(א) הוכיחו ש- $f^{-1}[A^c] = (f^{-1}[A])^c$ לכל $A \subseteq Y$.

(ב) נסחו והוכיחו תנאי הכרחי ומספיק לכך ש- $f(A^c) = (f(A))^c$ לכל $A \subseteq X$.

(ג) הוכיחו ש- $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ לכל $A, B \subseteq X$.

(ד) הוכיחו ש- $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$ לכל $A, B \subseteq X \Leftrightarrow f$ חח"ע.

שאלה 3

הוכיחו כי בכל מרחב מטרי (X, d) מתקיים:

$$1. \quad \text{לכל } n \geq 2 \quad d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$$

$$2. \quad |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

שאלה 4

נסמן ב- X את אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$. נגדיר

את הפונקציה הבאה: $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ על ידי:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{\min\{j \in \mathbb{N} : x_j \neq y_j\}} & x \neq y \end{cases}$$

. d היא מטריקה על X .

רמז: הראו ש- $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$.

שאלה 5

תהי $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה המקיימת לכל $x, y, z \in X$:

$$1. \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$2. \quad d(y, x) \leq d(z, y) + d(z, x)$$

הוכיחו ש- d מגדירה מטריקה על X .

שאלה 6

הוכיחו או הפריכו: הפונקציות הבאות הן מטריקות.

$$1. \quad d((x, y), (x', y')) = \min\{|x - x'|, |y - y'|\} \quad \text{על } \mathbb{R}^2$$

$$2. \quad d((x, y), (x', y')) = |x| + |y| + |x'| + |y'| \quad \text{על } \mathbb{R}^2$$

$$3. \quad D((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y') \quad \text{על } X \times X, \text{ כאשר } (X, d) \text{ הוא}$$

מרחב מטרי.

בהצלחה!