$a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$

שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה דיפרנציאלית (88-526)
שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ
סמסטר א', מועד א': 08.2.2011
יש לנמק את כל התשובות.
משך הבחינה: שעתיים וחצי.

1. יהי $k > 0$. תהי $f(x,y)$ פונקציה המקיימת $f(x,y) \geq k(x^2+y^2), f(0,0)=0$.
   א. מצא חסם תחתון לכל ערך עצמי של ההסיאן (Hessian) של f.
   ב. מצא חסם תחתון לעקמומיות גאוס של גרף של f בנקודה $(0, 0, f(0,0))$
   ג. תהי M משטח סגור במרחב תלת-מימדי. נניח שנקודה P על M הרחוקה ביותר מראשית הצירים. מצא סימן של עקמומיות גאוס של M בנקודה P.
   ד. הגדר עקמומיות ממוצעת של M ומצא סימנה בנקודה P.

2. בקואורדינטות $(u^1,u^2)=(x,y)$, נניח $f(x,y)=\frac{9}{y}$ ונתבונן במטריקה מוגדרת על ידי נוסחה $f(x,y)^2(dx^2+dy^2)$.
   א. חשב את המקדמים Γ^1_{11}, Γ^1_{21}, Γ^1_{12}, Γ^1_{22} של המטריקה.
   ב. הגדר אופרטור Laplace-Beltrami Δ_{LB}.
   ג. תנו נוסחה לעקמומיות של Gauss באמצעות אופרטור Δ_{LB}.
   ד. חשב את $K=K(x,y)$ של המטריקה.

$L_{ij} \to b_{ij}$

$L^i_j \to S^i_j$

3.
   א. הוכח את הנוסחה ל Γ^k_{ij} באמצעות המקדמים g_{ij}.
   ב. הוכח שהביטוי $\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\Gamma^l_{ij}x_l + L_{ij}n\right)$ הוא סימטרי ב- j ו k.
   ג. הסבר היחס בין מקדמים L_{ij} לבין $L^k{}_l$.
   ד. בטא את הביטוי $L_{i[j}L^k{}_{l]}$ באמצעות מקדמים של מטריקה.

$L_{i[j}L^k{}_{l]} =$

$L_{ij}L^k{}_l - L_{il}$

4. יהי טורוס T^2 ב-$\mathbf{R}^3$ עם פרמטריזציה
   $x(\theta,\varphi)=((4+3\cos\phi)\cos\theta,(4+3\cos\varphi)\sin\theta,3\sin\varphi)$.
   א. מצא אורך של θ-לולאה ושל φ-לולאה.
   ב. הגדר את הפרמטר הקונפורמי τ של הטורוס.
   ג. מצא פרמטר קונפורמי $\tau=\tau(T^2)$ באמצעות אינטגרל ומצא ערך של אינטגרל.

5. כתוב את הביטוים הבאים באמצעות Γ^k_{ij}, $L^k{}_l$, וגם L_{ij}:
   א. $\langle x_{ij}, x_k\rangle g^{ik}$.
   ב. $\langle n_j, x_k\rangle$.
   ג. $\langle n_j, x_{tk}\rangle$.
   ד. $\langle n, x_{pq}\rangle g^{qs}$.

$L_{i[j}L^k{}_{l]} =$

$\frac{1}{2}\left(L_{ij}L^k{}_l - L_{il}L^k{}_j\right)$

בהצלחה!

מבחן 8/2/2011

(2) $(u^1,u^2)=(x,y)$ נניח $f(x,y)=\frac{9}{y}$ ונתבונן במטריקה המוגדרת ע"י הנוסחה $f(x,y)^2(dx^2+dy^2)$

פתרון:

$$G_{ij} = f(x,y)^2(dx^2+dy^2) = f(x,y)^2dx^2 + f(x,y)^2dy^2$$

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} f(x,y)^2 & 0 \\ 0 & f(x,y)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{81}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{81}{y^2} \end{pmatrix}$$

יש לחשב המקדמים $\Gamma^1_{11}, \Gamma^1_{12}, \Gamma^1_{21}, \Gamma^1_{22}$ של המטריקה.

$$\boxed{\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{km}\left(g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m}\right)}$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{81} & 0 \\ 0 & \frac{y^2}{81} \end{pmatrix}$$

אין לכתוב מעבר לקו

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) + \frac{1}{2} g^{12}(g_{21,1} + g_{12,1} - \dots$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{81}(0+0-0) + \frac{1}{2} \cdot 0 (X) = 0$$

$g_{11,1} = 0$

$g_{11,2} = (81y^{-2})' = -162y^{-3} = -\frac{162}{y^3}$

$g_{21,1} = 0 \qquad g_{12,2} = 0$

$g_{12,1} = 0 \qquad g_{21,2} = 0$

$g_{22,1} = 0$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{2} g^{11}(g_{11,2} + g_{21,1} - g_{12,1}) + \frac{1}{2} g^{12}(g_{21,2} + g_{21,1} - \dots$$

$$= \frac{1}{2} \frac{y^2}{81}\left(-\frac{162}{y^3} + 0 - 0\right) + \frac{1}{2} 0 (X) =$$

$$= -\frac{1}{y}$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{11}(g_{12,2} + g_{21,1} - g_{22,1}) + \frac{1}{2} g^{12}(g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2})$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{81}(0+0-0) + \frac{1}{2} \cdot 0 (X) = 0$$

ב נחשב $K=K(x,y)$ של המטריקה. הערמומיות

$$K = \frac{2}{g_{11}} \cdot \left(\Gamma^2_{1[1,2]} + \Gamma^{j}_{1[1} \Gamma^2_{2]j} \right)$$

$$= \frac{1}{g_{11}} \left(\Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \right.$$

$$\left. + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12} \right)$$

נציב $= \frac{1}{\left(\frac{81}{y^2}\right)} \left(-\frac{1}{y^2} - 0 + 0 \cdot x - \left(-\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y} + \frac{1}{y}\left(-\frac{1}{y}\right) - 0 \right)$

$\frac{y^2}{81} \cdot \left(-\frac{1}{y^2} \cancel{+\frac{1}{y^2}} - \frac{1}{y^2} \right) = -\frac{1}{81}$

בהחלט יצאת מספר קבוע

$\Gamma^1_{12} = -\frac{1}{y} = \Gamma^1_{21}$ מצאנו

$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{22} = 0$

$\Gamma^2_{11} = \frac{-g_{,2}}{2g} = \frac{+162/y^3}{162/y^2} = \frac{1}{y}$

$g_{ij} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} = g \cdot I$ כש

$\Gamma^2_{11,2} = -\frac{1}{y^2}$ לפי y

$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{+g_{,1}}{2g} = 0$

$\Gamma^2_{22} = \frac{+g_{,2}}{2g} = -\frac{1}{y}$

(5) כתוב את הביטויים הבאים באמצעות $L_{ij}, L^k_l, \Gamma^k_{ij}$

b_{ij} S_{ij}

(א) $\langle X_{ij}, X_k \rangle \cdot g^{ik}$

אני מבינה ש X_{ij}, X_k הם הוקטורים המשיקים

r_k, r_{ij}

מיכאל,

$r_{,ij} = \Gamma^p_{ij}\, r_{,p} + b_{ij}\,\hat n$

$r_{,kl} = \Gamma^q_{kl}\, r_{,q} + b_{kl}\,\hat n$

$\langle r_{,ij}, r_{,kl} \rangle = \langle 1, 2 \rangle$

מפריד ולהוציא

Γ^p_{ij}, b_{ij}

מהמכפלה.

ולזכור

$\langle r_{,p}, \hat n \rangle = 0$

וגם

$\langle \hat n, \hat n \rangle$

זה אורך הוקטור בריבוע

וזה 1

!יחהה

$X_{ij} = X_{,ij} = \Gamma^p_{ij} X_{,p} + b_{ij}\hat n$

$X_k = X_{,k}$

לכן

$\langle X_{ij}, X_k \rangle =$

$\langle \Gamma^p_{ij} X_{,p} + b_{ij}\cdot \hat n, X_{,k} \rangle =$

$\langle \Gamma^p_{ij} X_p, X_{,k} \rangle + \langle b_{ij}\hat n, X_{,k} \rangle =$

נוציא Γ נוציא b_{ij}

$\Gamma^p_{ij} \langle X_p, X_{,k} \rangle + b_{ij} \langle \hat n, X_{,k} \rangle$

הנורמל והמשיק ניצבים ולכן מכפלתם 0

$\langle X_p, X_k \rangle$

זה המטריצה

g_{pk}

$\Gamma^p_{ij} \cdot g_{pk}$

מטריצת g

$\langle X_{ij}, X_k \rangle \cdot g^{ik} = \Gamma^p_{ij} \cdot g_{pk} \cdot g^{ik} =$

לכן: $\Gamma^p_{ij}\, \delta^i_p =$

$= \Gamma^p_{ij} (\delta \cdot \delta)$

$\Gamma^i_{ij} = \Gamma^i_{ij} =$

כי זה מטריצות g ואין

אין לכתוב מעבר לקו

אפקה המכללה האקדמית להנדסה בתל אביב

(3) $\langle \hat{n}, X_{pq} \rangle g^{qs}$

$X_{pq} = X_{,pq} = \Gamma^{k}_{pq} \cdot X_{,k} + b_{pq}\hat{n}$

$\langle \hat{n}, X_{pq} \rangle = \langle \hat{n}, \Gamma^{k}_{pq} X_{,k} + b_{pq}\hat{n} \rangle =$

[illegible]

$\langle \hat{n}, \Gamma^{k}_{pq} X_{,k} \rangle + \langle \hat{n}, b_{pq}\hat{n} \rangle$

$\Gamma^{k}_{pq} \langle \hat{n}, X_{,k} \rangle + b_{pq} \langle \hat{n}, \hat{n} \rangle$

(מאונכים) 0

אורך הנורמל 1

$0 + b_{pq}$

b_{pq}

וכעת

$\langle \hat{n}, X_{pq} \rangle g^{qs}$

$b_{pq} \cdot g^{qs}$ כפל מטריצות

b של g^{-1} של

נחליף הסדר ביניהם. כי אלו מספרים.

$g^{qs} \cdot b_{pq}$ ← מכפל הסימטריה נחליף pq

$g^{sq} \cdot b_{qp}$

הסימון לשורה s ועמודה p של S

S^{s}_{p}

4

בחינה בקורס 88-526-01 גיאומטריה דיפרנציאלית 1
מועד ב
מרצה: פרופ' מיכאל כץ
תאריך בחינה: 28/2/08
משך הבחינה: שעתיים וחצי

בהצלחה!

פרמטריזציה גאוסית

$X(\varphi)$

נא לתת הצדקה לכל תשובה.

1. נסתכל על המשטח M ב- R^3: $M = \{(x,y,z) \in R^3 : 4x^2+4y^2+4z^2 = 1\}$.
א) מצאו עקומה C מהירות יחידה, וגם פרמטריזציה של M כמשטח סיבוב של C.
ב) חשבו את התבנית היסודית הראשונה של M.
ג) חשבו את התבנית היסודית השניה של M.
ד) חשבו את מיפוי ויינגרטן של M. אופרטור הצורה

2. נתון המשטח הבא ב- R^3: $M = \{(x,y,z) \in R^3 : z = y^3\}$.
א) מהי עקמומיות גאוס K של M?
ב) הוכיחו שהקו $L = \{(x,y,z) \in R^3 : y = z = 0\}$ הוא עקומה גיאודזית של M.
~~ג) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:~~
~~נניח ש- M_1, M_2 שני משטחים ב- R^3 כך שעקמומיות גאוס שלהם קבועה ושווה (ז"א $K_{M_1} = K_{M_2}$ בכל נקודה). אזי קיימת איזומטריה בין M_1 ובין M_2.~~

3. נסתכל על מישור $R^2 = \{(x,y) : x,y \in R\}$ כאשר הוא מצויד בתבנית היסודית הראשונה הבאה:

$$g_{ij} = e^{(x+y)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

א) מצאו את סימני כריסטופל Γ_{ij}^k.
ב) האם הישר y = x הוא עקומה גיאודזית? $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$
ג) האם הישר y = 0 הוא עקומה גיאודזית? $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$
ד) האם הישר x = 1 הוא עקומה גיאודזית? $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$

להציב במשו' הקו הגיאודזי' ולבדוק אם פותר את המשו' ולראות שוויון.

4. נסתכל על משטח M שהוא ספרה ב- R^3 בעלת רדיוס 6 ומרכז בראשית הצירים. יהי $-6<a<6$ מספר כלשהו.
א) מצאו פרמטריזצית מהירות יחידה ועקמומיות של עקומת החיתוך γ של M ושל המישור { z=a }.
ב) עבור איזה ערך של a העקומה הנ"ל היא עקומה גיאודזית על גבי M?
-- נסמן הערך שמצאתם בסעיף ג) ב- b.
ג) עבור a = b+1, תהי S ספרה, שעקומת החיתוך γ של M ושל המישור z=a היא עקומה גיאודזית של S. מצאו פרמטריזציה של S כמשטח סיבוב של עקומת מהירות יחידה.

5. ~~נתבונן במשטח רגולרי $x(u^1,u^2)$ ב- R^3.~~
~~א) הגדר את מושג הרגולריות של $x(u^1,u^2)$~~
~~ב) הוכח שהביטוי $\frac{\partial}{\partial u^m}(\Gamma_{ij}^k x_k + L_{ij} n)$ הוא סימטרי ביחס לאינדקסים j וגם m.~~
~~ג) כתוב את הביטוי $L_{i[j} L^q_{k]}$ באמצעות של המקדמים Γ וגם g_{ij} בלבד.~~

מבחן 28/02/08 מועד ב

(1) נתון משטח ב-$\mathbb{R}^3$: $M = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ; 4x^2+4y^2+4z^2=1\}$

(ג) מצאו עקומה C מהירות יחידה. (בפרמטר טבעי)
ומצאו פרמטר של M כמשטח סיבוב של C.

$4x^2+4y^2+4z^2=1$

$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}$

| ספירה ברדיוס $\frac{1}{2}$ |

קואורדינטות ספריות

$(\varphi,\theta) = (R\sin\varphi\cdot\cos\theta,\ R\sin\varphi\cdot\sin\theta,\ R\cos\varphi)$

נסבור
ספירה זה מעגל סביב ציר z (ברדיוס $\frac{1}{2}$)

$f(\varphi) = x = \frac{1}{2}\cos\varphi$

$g(\varphi) = z = \frac{1}{2}\sin\varphi$

$\gamma(\varphi) = \left(\frac{1}{2}\cos\varphi, \frac{1}{2}\sin\varphi\right)$

אבל זו לא מהירות
יחידה

יש נוסחת משטח סבוב לפתי טבעית,

$r(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} f(\varphi)\cdot\cos\theta \\ f(\varphi)\sin\theta \\ g(\varphi) \end{pmatrix} =$

$S(t)=$

נשים ♡

$r(\theta, s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(2s)\cdot\cos\theta \\ \frac{1}{2}\cos(2s)\cdot\sin\theta \\ \frac{1}{2}\sin(2s) \end{pmatrix}$

$2s=\varphi$

זו פרמטר'
של M כמשטח סיבוב
של עקומה במהירות יחידה.

$\gamma(s) = \left(\frac{1}{2}\cos 2s, \frac{1}{2}\sin 2s\right)$

$\|\gamma'(s)\| = 1$ ✓

① נתון משטח ב-$\mathbb{R}^3$: $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ 4x^2+4y^2+4z^2=1\}$

ב) מצאו עקומה C מהירות יחידה. (פרמט טבעית)

ומצאו פרמט של M כמשטח סיבוב של C.

$4x^2+4y^2+4z^2=1$

$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}$

$\boxed{\text{ספרה ברדיוס } \tfrac{1}{2}}$

קואורדינטות ספריות

$(\varphi,\theta)=(R\sin\varphi\cdot\cos\theta,\ R\sin\varphi\sin\theta, \dots)$

ספרה

ספרה זה מעגל סביב ציר z (ברדיוס $\frac{1}{2}$)

$f(\varphi)=x=\frac{1}{2}\cos\varphi$

$g(\varphi)=z=\frac{1}{2}\sin\varphi$

$\gamma(\varphi)=\left(\frac{1}{2}\cos\varphi,\ \frac{1}{2}\sin\varphi\right)$

אבל זה לא מהירות יחידה

$S(t)=$

$2S=\varphi$

$\gamma(s)=\left(\frac{1}{2}\cos 2s,\ \frac{1}{2}\sin 2s\right)$

$\|\gamma'(s)\|=1$ ✓

נוסחת משטח סבוב לפרמטריזציה:

$$r(\varphi,\theta)=\begin{pmatrix} f(\varphi)\cos\theta \\ f(\varphi)\sin\theta \\ g(\varphi)\end{pmatrix}=$$

נציב

$$r(\theta,S)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(2S)\cdot\cos\theta \\ \frac{1}{2}\cos(2S)\cdot\sin\theta \\ \frac{1}{2}\sin(2S)\end{pmatrix}$$

פרמט של M כמשטח סיבוב של עקומה במהירות יחידה.

③ אופרטור הצורה

$$S = G^{-1} \cdot B$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\cos^2\varphi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\cos\varphi & 0 \\ 0 & -2(\cos\varphi + \sin\varphi\sin\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2\cos\varphi} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\cos\varphi + \sin\varphi\sin\varphi) \end{pmatrix}$$

<u>מיכאל!</u>

תרגיל שעשינו בכיתה: אם φ הוא פרמטר טבעי של העקומה $C: \begin{cases} x = f(\varphi) \\ z = g(\varphi) \end{cases}$ אזי התבנית היסודית הראשונה של משטח הסיבוב M הוא:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} f^2(\varphi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אצלנו $f(s) = \frac{1}{2}\cos(2s)$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\cos^2(2s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\cos^2(2s)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולהמשך,

(2) נתון המשטח הבא ב $\mathbb{R}^3$ $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z=y^3\}=$

א) מהי עקמומיות גאוס K של M.

נשים ♡ שזו משטח פיתוח

נמצא פרמטריזציה.

(במשטח אין עניין של פרמט' טבעית
לא באותו מובן כמו בעקומה)
כלומר להשתמש איך נראית נק' כללית
על M

$$r(x,y)=(x,y,y^3)$$

$u^1=x$ רכיב 1, $u^2=y$ רכיב 2, $u^3=y^3=z$ רכיב 3

ובכלליות לרשום

$$r(u,v)=(u,v,v^3)$$

ולהמשיך

בנוסף

$$\boxed{K_{\text{גאוס}}=\det S}$$

$$J=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&3y^2\end{pmatrix} \qquad J^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3y^2\end{pmatrix}$$

$$G_{ij}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3y^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&3y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1+9y^4\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&0&0\\0&1&3y^2\end{vmatrix}=i\cdot 0-j\cdot 3y^2+k\cdot 1 \qquad \vec{n}=(0,-3y^2,1)$$

$$\|\vec{n}\|=\sqrt{9y^4+1}$$

$$\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{9y^4+1}}(0,-3y^2,1)$$

$r_{,11} = (0,0,0)$

$r_{,12} = (0,0,0) = r_{,21}$

$r_{,22} = (0,0,6y)$

$b_{11} = \langle r_{,11}, \hat{n} \rangle = (0,0,0)\vec{\hat{n}} = 0$

$b_{12} = b_{21} = \langle r_{,12}, \hat{n} \rangle = (0,0,0)\cdot\vec{\hat{n}} = 0$

$b_{22} = \langle r_{,22}, \hat{n} \rangle = (0,0,6y)\cdot(0,-3y^2,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{9y^4+1}} = \frac{6y}{\sqrt{9y^4+1}}$

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{6y}{\sqrt{9y^4+1}} \end{pmatrix}$ $\quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+9y^4} \end{pmatrix}$

$S = G^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+9y^4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{6y}{\sqrt{9y^4+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{6y}{\sqrt{(9y^4+1)^3}} \end{pmatrix}$

$K = \det S = 0$ ✓ ✓

עקמומיות גאוס

אין לבזבז משבר לקח

(2) הוכיחו שהקו $L=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=z=0\}$ הוא גאודזי על M

$$\boxed{0=\ddot{\gamma}^{k}+\Gamma^{k}_{ij}\,\dot{\gamma}^{i}\cdot\dot{\gamma}^{j}}$$

$g_{ij}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1+9y^4\end{pmatrix}$

$g^{ij}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{1+9y^4}\end{pmatrix}$

$$\Gamma^{k}_{ij}=\frac{1}{2}g^{km}\left(g_{mi,j}+g_{jm,i}-g_{ij,m}\right)$$

במקרה זה, נשתמש בנוסחה

$g=\begin{pmatrix}g_1 & 0\\ 0 & g_2\end{pmatrix}$

$$\Gamma^{1}_{11}=\frac{1}{2g_1}\frac{\partial g_1}{\partial u}=\frac{1}{2}\cdot 0=0$$

$$\Gamma^{1}_{12}=\Gamma^{1}_{21}=\frac{1}{2g_1}\frac{\partial g_1}{\partial v}=\frac{1}{2}\cdot 0=0$$

$$\Gamma^{1}_{22}=-\frac{1}{2g_1}\cdot\frac{\partial g_2}{\partial u}=\frac{-1}{2}\cdot 0=0$$

$$\Gamma^{2}_{11}=\frac{-1}{2g_2}\frac{\partial g_1}{\partial v}=0$$

$$\Gamma^{2}_{21}=\Gamma^{2}_{12}=\frac{1}{2g_2}\frac{\partial g_2}{\partial u}\qquad \Gamma^{2}_{22}=\frac{1}{2g_2}\frac{\partial g_2}{\partial v}=\frac{1}{2(1+9y^4)}\cdot 36y^3$$

I $\ddot{\gamma}^1+\Gamma^1_{11}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^1+(\Gamma^1_{12}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^2)\cdot 2+\Gamma^1_{22}\dot{\gamma}^2\dot{\gamma}^2=0$

משתנה x

$\ddot{x}=0$

II $\ddot{\gamma}^2+\Gamma^2_{11}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^1+2\cdot\left(\Gamma^2_{21}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^2\right)+\Gamma^2_{22}\dot{\gamma}^2\dot{\gamma}^2=0$

משתנה y

$\ddot{y}+0+0+\frac{36y^3}{2(1+9y^4)}\cdot\dot{y}\cdot\dot{y}=0$

$\ddot{y}+\frac{36y^3}{2(1+9y^4)}\cdot(\dot{y})^2=0$

כעת נבדוק האם $y=0$ $z=0$ פותרות את המשוואה

נסמן $z=y^3$

$\dot{y}=0$

$\ddot{y}=0$

II $0+0=0$ $0=0$ ✓

I $\ddot{x}=0$

$\dot{x}=a$

$x=at+c$

$x=at+c$

$y=0$

$z=0$

$(at+c,0,0)$ זהו ציר ה-X

וזה בדיוק מה שביקשו להראות!!

נתונה יריעה דו־ממדית $K=$ אשר הוא
מצוייד בתבנית היסודית הראשונה הבאה:

$$g_{ij}=e^{(x+y)}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

ב.

א) מצאו את סימני כריסטופל Γ^{k}_{ij}

לשם כך צריך g_{ij}, g^{ij}

$$g_{ij}=\begin{pmatrix}e^{(x+y)}&0\\0&e^{(x+y)}\end{pmatrix}$$

$$g^{ij}=\begin{pmatrix}\frac{1}{e^{(x+y)}}&0\\0&\frac{1}{e^{x+y}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-(x+y)}&0\\0&e^{-(x+y)}\end{pmatrix}$$

$$g_{11,1}\underset{\text{לפי משתנה } x}{=}e^{(x+y)}$$

$$g_{11,2}\underset{\text{לפי } y}{=}e^{(x+y)}$$

$$g_{12,1}=g_{12,2}=g_{21,1}=g_{21,2}=g^{12}=g^{21}=0$$

$$g_{22,1}=e^{x+y}$$
$$g_{22,2}=e^{x+y}$$

$$g^{22}=e^{-(x+y)}$$
$$g^{11}=e^{-(x+y)}$$

אין לכתוב מעבר לקו

ב) האם הישר $y=x$ הוא עקומה גיאודזית?
לשם כך יש למצוא את המשוואות הגיאודזיות, את סימני
כריסטופל ולהציב שם $y=x$.

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{km}\left(g_{mi,j} + g_{jm,i} - g_{ij,m}\right)$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{11}\left(g_{11,1} + \cancel{g_{11,1}} - \cancel{g_{11,1}}\right) + \cancel{\frac{1}{2} g^{12}}_{0}$$

$$\frac{1}{2} e^{-(x+y)}\left(e^{(x+y)}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{2} g^{11}\left(g_{11,2} + g_{21,1} - g_{12,1}\right) + \cancel{\frac{1}{2} g^{12}(\quad)}_{0}$$

$$\frac{1}{2} e^{-(x+y)}\left(e^{(x+y)} + 0 - 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2} g^{11}\left(\underset{0}{g_{12,2}} + \underset{0}{g_{21,2}} - g_{22,1}\right) + \cancel{\frac{1}{2} g^{12}(\quad)}_{0}$$

$$\frac{1}{2} e^{-(x+y)}\left(-e^{x+y}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Gamma^2_{11} = \cancel{\frac{1}{2} g^{21}(\quad)}_{0} + \frac{1}{2} g^{22}\left(\overset{0}{g_{21,1}} + \overset{0}{g_{21,1}} - g_{11,2}\right)$$

$$\frac{1}{2} e^{-(x+y)}\left(-e^{x+y}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \cancel{\frac{1}{2} g^{21}(\quad)}_{0} + \frac{1}{2} g^{22}\left(\overset{0}{g_{21,2}} + g_{22,1} - \overset{0}{g_{12,2}}\right)$$

$$\frac{1}{2} e^{-(x+y)}\left(e^{x+y}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Gamma^2_{22} = \cancel{\frac{1}{2} g^{21}(\quad)}_{0} + \frac{1}{2} g^{22}\left(g_{22,2} + \cancel{g_{22,2}} - \cancel{g_{22,2}}\right)$$

$$\frac{1}{2} e^{-(x+y)}\left(e^{x+y}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{0=\ddot{\gamma}^k+\Gamma^k_{ij}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j}$$

$$\mathrm{I}\quad \ddot{\gamma}^1+\Gamma^1_{11}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^1+2\Gamma^1_{12}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^2+\Gamma^1_{22}\dot{\gamma}^2\dot{\gamma}^2=0$$

$$\cancel{\ddot{x}}+\frac{1}{2}\dot{x}\dot{x}+2\cdot\frac{1}{2}\dot{x}\dot{y}+-\frac{1}{2}\dot{y}\dot{y}=0$$

$$2\ddot{x}+(\dot{x})^2+2\dot{x}\dot{y}-(\dot{y})^2=0$$

$$\mathrm{II}\quad \ddot{\gamma}^2+\Gamma^2_{11}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^1+2\Gamma^2_{12}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^2+\Gamma^2_{22}\dot{\gamma}^2\dot{\gamma}^2=0$$

$$\ddot{y}+-\frac{1}{2}\dot{x}\cdot\dot{x}+2\cdot\frac{1}{2}\dot{x}\dot{y}+\frac{1}{2}\dot{y}\dot{y}=0$$

$$\ddot{y}-\frac{1}{2}(\dot{x})^2+\dot{x}\dot{y}+\frac{1}{2}(\dot{y})^2=0$$

$$2\ddot{y}-(\dot{x})^2+2\dot{x}\dot{y}+(\dot{y})^2=0$$

המשוואות הגיאודזיות

$$\begin{cases}2\ddot{x}+(\dot{x})^2+2\dot{x}\dot{y}-(\dot{y})^2=0 & \mathrm{I}\\ 2\ddot{y}-(\dot{x})^2+2\dot{x}\dot{y}+(\dot{y})^2=0 & \mathrm{II}\end{cases}$$

כעת נבדוק האם $y=x$ עקומה גיאודזית

$$\dot{y}=\dot{x}$$
$$\ddot{y}=\ddot{x}$$

$$\mathrm{I}\quad 2\ddot{x}+\cancel{(\dot{x})^2}+2\dot{x}\dot{x}-\cancel{(\dot{x})^2}=0$$

$$2\ddot{x}+2(\dot{x})^2=0$$

$$\ddot{x}+(\dot{x})^2=0$$

$$\mathrm{II}\quad 2\ddot{x}-\cancel{(\dot{x})^2}+2\dot{x}\dot{x}+\cancel{\dot{x}^2}=$$

$$2\ddot{x}+2(\dot{x})^2=0$$

$$\ddot{x}+(\dot{x})^2=0$$

ⓒ נבדוק האם $y=0$ הוא עקומה גיאודזית

$\dot{y}=0$

$\ddot{y}=0$

I $\quad 2\ddot{x}+(\dot{x})^2+2\dot{x}\cdot 0-0^2=0 \qquad 2\ddot{x}+(\dot{x})^2=0$

II $\quad 2\cdot 0-(\dot{x})^2+2\dot{x}\cdot 0+0^2=0 \qquad -(\dot{x})^2=0$

בתנאי c

$\ddot{x}=0$

$0=\dot{x}$ כלומר סרה $\longrightarrow x=c$

$0=\ddot{x}$ וגם $\longrightarrow \dot{x}=d$

$x=dt+e$

השוואת מקדמים $(\dot{x})$ $d=0$

(x) $dt+e=c \quad e=c$

$x=0t+c$

$x=c$

③ נבדוק האם $x=1$ הוא עקומה גיאודזית

$\dot{x}=0$

$\ddot{x}=0$

I $\quad 2\cdot 0+0^2+2\cdot 0\cdot\dot{y}-(\dot{y})^2=0 \qquad -(\dot{y})^2=0 \quad (\dot{y})^2=0$

II $\quad 2\ddot{y}-0^2+2\cdot 0\cdot\dot{y}+(\dot{y})^2=0 \qquad 2\ddot{y}+\dot{y}^2=0$

בתנאים

$2\ddot{y}=0$

$\ddot{y}=0$

מקבלים

$\dot{y}=0 \qquad y=c$

$\ddot{y}=0 \qquad \dot{y}=d \qquad y=dt+e$

השוואת מקדמים $(\dot{y})$ $d=0$

(y) $c=dt+e$ $\Big\}\ c=e \Rightarrow y=0+e$ $\quad y=e \quad x=0 \quad (0,e)$

קבוע

שום נקודה אחרת לא קו גיאודזי

נמשיך $x=y$. קיבלנו משוואה קודמת $\ddot{x}+(\dot{x})^2=0$

$\dot{x}=p \Rightarrow$ נציב (והחלפנו משוואה)

$\dot{p}+p^2=0$

$\dot{p}=-p^2$

$\frac{dp}{dt}=-p^2$

$\longrightarrow \quad p=\dot{x}$

$\dot{x}=\frac{1}{t-c}$

$dp\,\frac{1}{p^2}=-dt$

אינטגרל

$\boxed{x=\ln|t-c|+a}=y$

$-\frac{1}{p}=-t+c \qquad p=\frac{1}{t-c}$

$(\ln|t-c|+a,\ \ln|t-c|+a)$

אין לכתוב מעבר לקו

משיק $y=x$)

$(\ln|t-c|+a, \ln|t-c|+a)$

במקרה זה קיבלנו ישר ולכן קו ישר זה $y=x$

פותר את המש' הגיאודזית.

הוא קו גיאודזי.

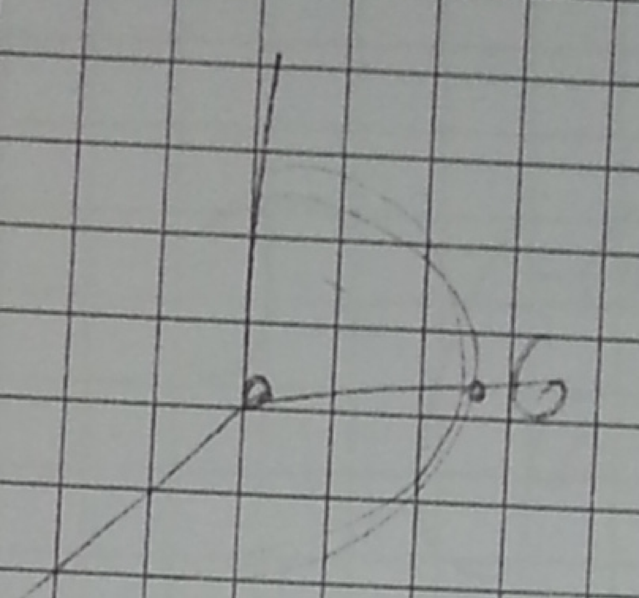
אין לכתוב מעבר לקו

(4) נסתכל על משטח M שהוא הספירה ב- $\mathbb{R}^3$ בעלת רדיוס 6 ומרכזה בראשית הצירים. יהי $-6<a<6$ מספר כלשהו.

(א) מצאו פרמטריזציה, מהירות יחידה ועקמומיות של עקומת החיתוך של M ושל המישור $\{z=a\}$.

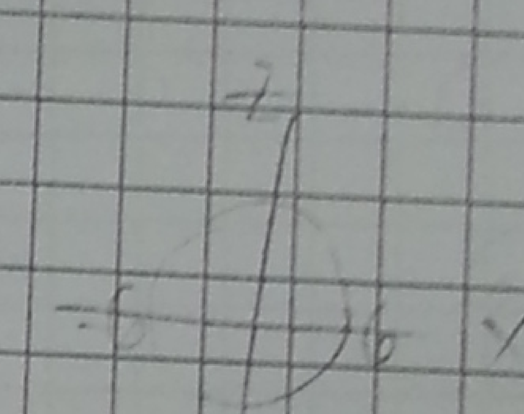
$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{36}=1$$

ספירה בעלת רדיוס 6 שמרכזה בראשית (0,0,0)



זה מעגל סביב ציר z

$x^2+z^2 = 36$



$x = 6\cos\varphi = f(\varphi)$

$z = 6\sin\varphi = g(\varphi)$

$\gamma(\varphi) = (6\cos\varphi, 6\sin\varphi)$

נבדוק האם טבעית

$\gamma'(\varphi) = (-6\sin\varphi, 6\cos\varphi)$

$\|\gamma'(\varphi)\| = \sqrt{36\sin^2\varphi + 36\cos^2\varphi}$

$= 6 \neq 1$

נעשה פרמ' טבעית:

$$S(t) = \int_0^t (6)\,du = 6t$$

$$t(s) = \frac{s}{6}$$

$$\gamma(s) = \left(6\cos\left(\frac{s}{6}\right), 6\sin\left(\frac{s}{6}\right)\right)$$

נבדוק שטבעית

$$\gamma'(s) = \left(-6\sin\left(\frac{s}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}, 6\cos\left(\frac{s}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}\right) = \left(-\sin\left(\frac{s}{6}\right), \cos\left(\frac{s}{6}\right)\right)$$

$\|\gamma'(s)\| = 1$ ✓

אין לכתוב מעבר לקו

כעת נמצא עקמומיות של עקומת החיתוך γ של M ושל המישור $z=a$ (משוואות)

$$\begin{cases} f(\varphi)=6\cos\varphi \\ g(\varphi)=6\sin\varphi \end{cases} \qquad r(\theta,\varphi)=\begin{pmatrix} 6\cos\varphi\cos\theta \\ 6\cos\varphi\sin\theta \\ 6\sin\varphi \end{pmatrix}$$

העקמומיות תהיה $K=\frac{1}{2}\operatorname{trace} S$

$$J=\begin{pmatrix} -6\cos\varphi\sin\theta & -6\sin\varphi\cos\theta \\ 6\cos\varphi\cos\theta & -6\sin\varphi\sin\theta \\ 0 & 6\cos\varphi \end{pmatrix}$$

לפי θ לפי φ

$$J^t=\begin{pmatrix} -6\cos\varphi\sin\theta & 6\cos\varphi\cos\theta & 0 \\ -6\sin\varphi\cos\theta & -6\sin\varphi\sin\theta & 6\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$G=J^t\cdot J=\begin{pmatrix} f^2(\varphi) & 0 \\ 0 & ? \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 36\cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$$

$36\sin^2\varphi\cos^2\theta$

$+36\sin^2\varphi\sin^2\theta+$

$36\cos^2\varphi$

$36\sin^2\varphi\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}+$

$36\cos^2\varphi=36$

K =

S

$t = \underline{K_1}$

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} 36\cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} \qquad G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{36\cos^2\varphi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -6\cos\varphi\sin\theta & 6\cos\varphi\cos\theta & 0 \\ -6\sin\varphi\cos\theta & -6\sin\varphi\sin\theta & 6\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$\hat{i}\left(36\cos^2\varphi\cos\theta\right) - \hat{j}\left(-36\cos^2\varphi\sin\theta\right) + \hat{k}\left(\right.$$

$36\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi\sin\theta$

$+36\cos\varphi\sin\varphi$

$\sqrt{11}$

אין לכתוב מעבר לקו

שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה דיפרנציאלית אלמנטרית (88-201)
שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ
סמסטר א', מועד א': 22.2.12

<u>יש לנמק ולהצדיק את כל התשובות.</u>

<u>משך הבחינה: שלוש שעות.</u>

$K=\det S$

$S=G^{-1}B$

1. נתונה תבנית ריבועית $Q(x,y)=-3x^2+4xy-6y^2$.

א. עקומה מישורית מוגדרת ע"י המשוואה $Q(x,y)=-1$. מהי צורת העקומה?

ב. מהי העקמומיות הכוללת של עקומה זו?

ג. מהי צורת המשטח המתקבל כגרף של התבנית הריבועית $z=Q(x,y)$?

ד. חשב את עקמומיות גאוס של הגרף בנקודה $(0,0,0)$.

2. יהי $M\subset\mathbb{R}^3$ משטח עם פרמטריזציה $x(u^1,u^2)$.

א. תנו שלושה דרכים של חישוב של עקמומיות גאוס של $M\subset\mathbb{R}^3$.

ב. נניח שהמטריקה היא $\frac{c^2}{y^2}\left(dx^2+dy^2\right)$ כאשר $u^1=x$ ואילו $u^2=y$. חשב את עקמומיות גאוס $K=K(x,y)$ שלה.

ג. נניח שהמטריקה היא $d\varphi^2+(\sin^2\varphi)\left(d\theta^2\right)$ כאשר $u^1=\theta$ ואילו $u^2=\varphi$. חשב את עקמומיות $K=K(\theta,\varphi)$ של המטריקה.

3.

א. לגבי משטח M עם מקדמים g_{ij} של התבנית היסודית הראשונה, הגדר את אלמנט השטח dA שלו.

ב. נסח משפט גאוס-בונה לגבי משטח סגור קמור M.

ג. לגבי משטח $M_1\subset\mathbb{R}^3$ מוגדר על ידי משוואה $x^2+y^2+2z^2=1$ מצא את האינטגרל $\iint_{M_1} K\,dA$.

ד. לגבי $M_2\subset\mathbb{R}^3$ מוגדר ע"י $\left(x^2+y^2+2z^2-1\right)\left((x-10)^2+y^2+2z^2-1\right)=0$ מצא את האינטגרל $\iint_{M_2} K\,dA$.

4. יהי D_p (עם $p=0$) מרחב של פונקציות $f=f(u)$ כאשר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

א. הגדר מושג של דריבציה $X:D_p\to\mathbb{R}$.

ב. הוכח שדריבציה X מתאפסת על פונקציות f קבועות.

ג. יהי $u=u^1$ פרמטר מוגדר בתחום I. נניח $X(u)=C$. לכל $f\in D_p$, בטא $X(f)$ באמצעות $C=X(u)$ וגם $\frac{d}{du}$ מחושב ל $f=f(u)$.

ד. מצא ממד של מרחב הדריבציות של D_p.

5. כתוב את הביטויים הבאים באמצעות Γ_{ij}^k, Γ_{ijk}, וגם L_{ij}:

א. $g^{lk}\left(x_{ij},x_l\right)$.

ב. $\left\langle n_j , x_{\ell k} \right\rangle$.

ג. $g^{qs}\left\langle n, x_{pq} \right\rangle$.

ד. $\delta^i{}_j \delta^j{}_k \delta^k{}_i$ כאשר $i, j, k = 1,2,\ldots,n$.

בהצלחה!

מבחן בגיאומטריה מועד א'

① נתונה תבנית ריבועית $Q(x,y)=-3x^2+4xy-6y^2$

א) עקומה מישורית מוגדרת ע"י המשוואה $Q(x,y)=-1$. מהי צורת העקומה?

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -6\end{pmatrix}$$

<u>אליפסה</u> $|A|=\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 2 & -6\end{vmatrix}=14>0$

הדטרמיננטה של A גדולה או שווה או בשווה

ב) מה העקמומיות הכוללת של עקומה זו?

העקמומיות הכוללת היא האינטגרל על העקמומיות

$$\int_a^b k\,ds=\int_a^b \frac{d\theta}{ds}\,ds=\theta(b)-\theta(a)$$

משפט: עבור עקומה סגורה קמורה (לא חותכת את עצמה) העקמומיות הכוללת שלה היא 2π

במקרה של אליפסה

האליפסה נתונה

$\gamma(t)=(a\cos t, b\sin t)$ ← פרמטריזציה (בכיוון השעון)

$\gamma'(t)=(-a\sin t, b\cos t)$

$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}$

מהם a,b: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

כאשר נציב נקבל

$\frac{(a\cos t)^2}{a^2}+\frac{(b\sin t)^2}{b^2}=1$

$1=1$

או דרך נוסחת העקמומיות

$k=\frac{\det(\gamma',\gamma'')}{\|\gamma'\|^3}$

(ב) מה צורת המשטח המתקבל כאשר ע המשוואה הריבועית

$z = Q(x,y)$

$z = -3x^2 + 4yx - 6y^2$

$3x^2 - 4yx + 6y^2 - z = 0$

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-6 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-6)\lambda - 2\cdot 2\lambda + 0$

$(\lambda-3)(\lambda-6)\lambda - 4\lambda$

$\lambda((\lambda-3)(\lambda-6)-4) = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 6\lambda - 3\lambda + 18 - 4)$

$\lambda_3 = 0 \qquad \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm 5}{2}$ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_3 = 7$

ו"ע

$\lambda_1 = 0$

$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-3a + 2b = 0 \quad 2b = 3a$

$2a - 6b = 0 \quad 2a = 6b \quad \frac{2}{3}a = 2b$

$a = b = 0$ c חופשי

$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ מנורמל

$\lambda_2 = 2$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-a + 2b = 0 \quad a = 2b$

$2a - 4b = 0 \quad a = 2b$

$2c = 0 \quad c = 0$

$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ מנורמל $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

דף לכתיבת טיוטה בלבד

$\lambda_3 = 7$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$4a + 2b = 0 \quad b = -2a$

$2a + b = 0 \quad b = -2a$

$7c = 0 \quad c = 0$

$\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

מנורמל

$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\underset{\text{מנורמל}}{P} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{v_1} \quad \vec{v_2} \quad v_3$

כעת

$$X^T A X + b^T X + C = 0$$

$$(PX')^T A (PX') + \vec{b}^T (PX') + C = 0$$

$$X'^T \underbrace{P^T A P}_{D} X' + (0,0,-1)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} X' + 0 = 0$$

$$X'^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} X' + \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0$$

כעת אין גורמים מעורבים

$$x'^2 \cdot 0 + y'^2 \cdot 2 + z'^2 \cdot 7 - x' = 0$$

$$2 \cdot y'^2 + 7 \cdot z'^2 - x' = 0$$

$$2(y')^2 + 7(z')^2 = x'$$

$$\boxed{\frac{(y')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{(z')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} = x'}$$

פרבולואיד אליפטי

אין לכתוב מעבר לקו

~~3) חשב את עקמומיות גאוס של רגל בנקודה (0,0,0)~~

~~$K=\det S$~~

2

ג

$(\sin^2\varphi)(d\theta^2)+d\varphi^2$ כאשר $\theta=u^1$ ה-x (המשתנה הראשון) $\varphi=u^2$ ה-y

א. נחשב עקמומיות המטריקה

$$\boxed{G_{ij}=\begin{pmatrix}\sin^2\varphi & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$$

לא סקלרית אבל אלכסונית $\longrightarrow$ במקרה שלנו $G=\mathrm{diag}(g_1,g_2)$

$$G=\begin{pmatrix}g_1 & 0\\ 0 & g_2\end{pmatrix}$$

$$K=\frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{11,2}-\Gamma^2_{12,1}+\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21}-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}+\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}-\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}\right)$$

אם מסתכלים את זה בתוך ספירה עם רדיוס 1, אז ניתן לקבל.

ויודע מה: עקמומיות גאוס בספירה ברדיוס R

$$\Gamma^1_{11}=+\frac{1}{2g_1}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial u}=\frac{1}{2\sin^2\varphi}\cdot 0=0$$

נגזרת g לפי φ

$$\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=+\frac{1}{2g_1}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial v}=\frac{1}{2\sin^2\varphi}\cdot 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi=\mathrm{ctg}\varphi$$

$$\Gamma^1_{22}=-\frac{1}{2g_1}\cdot\frac{\partial g_2}{\partial u}=-\frac{1}{2\sin^2\varphi}\cdot 0=0$$

$$k=\frac{1}{R^2}=\frac{1}{1^2}$$

$$\Gamma^{2}_{11} = \frac{-1}{2g_2}\frac{\partial g_1}{\partial v} = \frac{-1}{\cancel{2\sin^2\varphi}}\cdot \cancel{2}\sin\varphi\cos\varphi = \quad = -\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$

$$\Gamma^{2}_{21} = \Gamma^{2}_{12} = \frac{+1}{2g_2}\cdot\underbrace{\frac{\partial g_2}{\partial u}}_{0} = 0$$

$$\Gamma^{2}_{22} = +\frac{1}{2g_2}\cdot\frac{\partial g_2}{\partial v} = \frac{1}{2\cdot 1}\cdot 0 = 0$$

$$\Gamma^{2}_{11,2} = \quad -(\cos\varphi\cdot(\cos\varphi) + \sin\varphi(-\sin\varphi)$$

$$-(\cos^2\varphi) + \sin^2\varphi$$

$$\Gamma^{2}_{12,1} = 0$$

ונציב

$$K = \frac{1}{\sin^2\varphi}\cdot\left(\frac{1}{\sin^2\varphi} - 0 + 0\cdot x - ctg\varphi\,\overset{-\sin\varphi\cos\varphi}{(\ldots)} - \cancel{\overset{0}{\overset{-\sin\varphi\cos\varphi}{ctg\varphi}}}\cdot 0 - 0\cdot x\right)$$

$$K = \frac{1}{\sin^2\varphi}\left(-\cancel{\cos^2\varphi} + \underbrace{\sin^2\varphi}_{1} - 0 + 0\cdot x + \cancel{\cos^2\varphi}\right) = 1$$

כי סימטריות

שאלה

(3) יהי משטח M עם מקדמים g_{ij} של תבנית יסודית ראשונה, הגדר את אלמנט השטח dA שלו.

מיכאל

$$\sqrt{|g|}\, du\, dv$$

(5) כתוב הביטויים הבאים באמצעות Γ^{k}_{ij} , L^{k}_{l} , L_{ij}

$L_{ij} = b_{ij}$

$L^{k}_{l} = S_{kl}$

(a) $\langle X_{ij} , X_k \rangle g^{ik} =$

$$\boxed{X_{ij} = X_{,ij} = \Gamma^{p}_{ij} X_{,p} + b_{ij}\hat{n}}$$

$$\langle X_{ij} , X_k \rangle = \langle \Gamma^{p}_{ij} X_{,p} + b_{ij}\hat{n} , X_k \rangle$$

$$= \langle \Gamma^{p}_{ij} X_{,p} , X_k \rangle + \langle b_{ij}\hat{n} , X_k \rangle =$$

$$\Gamma^{p}_{ij} \langle X_{,p} , X_k \rangle + b_{ij} \underbrace{\langle \hat{n} , X_k \rangle}_{\text{משיק וקטור נורמל}}$$

$\Gamma^{p}_{ij}\, g_{pk}$ 0

זה

אבל ביקשו באמצעות

$$\Gamma^{p}_{ij} g_{pk} \cdot g^{ik} = \Gamma^{p}_{ij} g_{pk} g^{ki} = \Gamma^{p}_{ij} I^{i}_{p}$$

(2) $\cancel{\langle n, x_{pq} \rangle} = 0$

מכפלה
שווה 0
כשלמהר

(2) $\langle n, x_{pq} \rangle$ g 25

שונה
מאפס
ווסם

מאפס

(3) $\delta^i_j \delta^j_k \delta^k_i =$ $i,k,j = 1,2 \ldots n$

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \delta^k_i \delta^j_k \delta^i_j$$

מחובר על כשכוניתן 1

אם $k=j=i$

ויש כאלו n מחוברים

ולכן הביטוי שווה ל-n