פתרון 4 באינפי 2 למדמ"ח

שאלה 1

1. לפי אינטגרציה בחלקים

$$\int xe^{-x}\mathrm{d}x = -xe^{-x} + \int e^{-x}\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

2. לפי נוסחא טריגונומטרית

$$\int e^{2x}\sin^2 x\mathrm{d}x = \int e^{2x}(\frac{1-\cos 2x}{2})\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x\mathrm{d}x$$

את האינטגרל שנשאר מוצאים בעזרת אינטגרציה בחלקים

$$\int e^{2x}\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x + \int e^{2x}\sin 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 2x + \frac{1}{2}e^{2x}\sin 2x - \int e^{2x}\cos 2x\mathrm{d}x$$

ולכן

$$\int e^{2x}\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^{2x}\cos 2x + \frac{1}{4}e^{2x}\sin 2x$$

כלומר התשובה הסופית היא

$$\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{8}e^{2x}\cos 2x + \frac{1}{8}e^{2x}\sin 2x + c$$

3.

$$\int x\sqrt[6]{2x+3}\mathrm{d}x \underset{\substack{t=2x+3\\ \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x}}{=} \int \frac{(t-3)}{2}\sqrt[6]{t}\frac{1}{2}\mathrm{d}t = \int \frac{t^{\frac{7}{6}}}{4}\mathrm{d}t - \int \frac{3t^{\frac{1}{6}}}{4}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{6}{13}\frac{t^{\frac{13}{6}}}{4} - \frac{6}{7}\frac{3t^{\frac{7}{6}}}{4} + c$$

כלומר התשובה היא

$$\frac{6}{52}\sqrt[6]{(2x+3)^{13}} - \frac{18}{28}\sqrt[6]{(2x+3)^7}$$

4.

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{x-\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x$$

נציב $t^2 = x+1$ ולכן $2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ ונקבל

$$\int \frac{t+2}{t^2-1-t+1}2t\mathrm{d}t = 2\int \frac{t+2}{t-1}\mathrm{d}t = 2\int 1 + \frac{3}{t-1}\mathrm{d}t =$$

$$= 2t + 6\ln|t-1| + c = 2\sqrt{x+1} + 6\ln|\sqrt{x+1}-1| + c$$

.5

$$\int x^3\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x$$

נציב $t^2=9-x^2$ כלומר

$$t\mathrm{d}t=-x\mathrm{d}x$$

ולכן האינטגרל הוא

$$\int x^3\sqrt{9-x^2}\mathrm{d}x=\int x^2\sqrt{9-x^2}x\mathrm{d}x=\int(9-t^2)t(-t\mathrm{d}t)=-\int 9t^2\mathrm{d}t+\int t^4\mathrm{d}t$$
$$=-3t^3+\frac{1}{5}t^5+c=-3(\sqrt{9-x^2})^3+\frac{1}{5}(\sqrt{9-x^2})^5+c$$

$$\int\left(\frac{\mathbf{1-x}}{\boldsymbol{x}}\right)^{2}\boldsymbol{dx}=\int\frac{1-2x+x^{2}}{x^{2}}dx=\int\left[\frac{1}{x^{2}}-\frac{2}{x}+1\right]=-\frac{1}{x}-2ln|x|+x+C$$ .6

$$\int\frac{\boldsymbol{e^{x}}}{\boldsymbol{e^{x}+e^{\frac{x}{2}}}}\boldsymbol{dx}=\int\frac{\boldsymbol{e^{\frac{x}{2}}}}{\boldsymbol{e^{\frac{x}{2}}+1}}dx=_{u=e^{\frac{x}{2}}}=\int\frac{2du}{u+1}=2ln\left|e^{\frac{x}{2}}+1\right|+C$$ .7

$$\int\frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\mathbf{2x-3}}}=_{\boldsymbol{t=\sqrt{2x-3}}}=\cdots=\sqrt{\mathbf{2x-3}}+\mathbf{C}$$ .8

9. $\int \sin(\ln(x))dx$

פתרון: $\int \sin(\ln(x))dx = x\sin(\ln(x)) - \int x\cos(\ln(x))\frac{1}{x}dx = x\sin(\ln(x)) - \int \cos(\ln(x))dx =$

$$= x\sin(\ln(x)) - \left[x\cos(\ln(x)) - \int -x\sin(\ln(x))\frac{1}{x}dx \right] =$$

$$= x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x)) - \int \sin(\ln(x))dx$$

ולכן $\int \sin(\ln(x))dx = \frac{1}{2}\left[x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x)) \right]$

10. $\int 2x \arctan x dx$

פתרון: $\int 2x\arctan x dx = x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2}dx = x^2 \arctan x - \int \frac{-1+1+x^2}{1+x^2}dx =$

$$= x^2 \arctan x - \left[\int \frac{-1}{1+x^2}dx + \int dx \right] = x^2 \arctan x + \arctan x - x + C =$$

11. $\int sin^6 x \cdot cos^2 x dx$

פתרון:

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$ ולכן $\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x$.

$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ ולכן $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ ו $\sin^4 x = \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2$.

נכפיל את שתי המשוואות האחרונות לקבל $\int \sin^6 x\cos^2 x dx = \int \sin^4 x\sin^2 x\cos^2 x dx =$

$= \int \frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2 \frac{1}{4}\sin^2 2x dx = \frac{1}{16}\left[\int \sin^2 2x dx - \int 2\cos 2x\sin^2 2x dx + \int \cos^2 2x\sin^2 2x dx\right]$.

נחשב כל אחד מן האינטגרלים:

$\cos 4x = \cos 2\cdot 2x = 1-2\sin^2 2x$ ולכן $\int \sin^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$

$\int 2\cos 2x \sin^2 2x\,dx$, נבצע הצבה $t = \sin 2x$ ולכן $dt = 2\cos 2x\,dx$ ונקבל

$$\int 2\cos 2x \sin^2 2x\,dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 2x + C$$

$\left(\frac{1}{2}\sin 4x\right)^2 = \cos^2 2x \sin^2 2x$ אבל $\cos 8x = 1-2\sin^2 4x$ ולכן

$$\int \cos^2 2x \sin^2 2x\,dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 4x\,dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 8x)dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{64}\sin 8x + C$$

נציב את כל התוצאות האלה לקבל את התשובה הסופית.

1 .2

$$I_m = \int x^{\alpha} ln^{m} x dx \; =_{\text{חלקים}} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} ln^{m}(x) - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} m \cdot ln^{m-1}(x) \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} ln^{m}(x) - \int \frac{x^{\alpha}}{\alpha+1} m \cdot ln^{m-1}(x) dx = \mathbf{\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} ln^{m}(x) - \frac{m}{\alpha+1} \cdot I_{m-1} + C}$$

2. עבור $n=1$ $\int \sin x dx = -\cos x + c$, עבור n=2

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$I_n = \int \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n+1)\int \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^2 x \cdot (1-\sin^2 x) dx =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\left(\int \sin^{n-2} x dx - \int \sin^n x dx\right) =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \Rightarrow$$

$$I_n = \frac{1}{n}((n-1) I_{N-2} - \cos x \sin^{n-1} x) : \mathrm{n} > 2$$ עבור