

אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 6

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

שאלה 1

הוכיחו כי $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2-1 \rangle$ איזומורפי ל $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle$

שאלה 2

יהי n מספר טבעי ונסמן $S = \{n^k : k = 0, 1, 2, \dots\}$. נסמן ב $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$ את החוג $S^{-1}\mathbb{Z}$.

א. אם p מספר ראשוני, הוכיחו שאין חוג R המוכל ממש בין \mathbb{Z} ל $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$.

ב. מה הם האידיאלים ב $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{7}\right]$?

שאלה 3

יהי R חוג קומוטטיבי עם יחידה. עבור שני אידיאלים I, J של R נגדיר $[I:J] = \{x \in R : xJ \subseteq I\}$.

א. הוכיחו שאם P אידיאל ראשוני ו J לא מוכל ב P אז $[P:J] = P$.

ב. יהי I אידיאל, $a \in R$. הוכיחו כי $[I:\langle a \rangle] \subseteq [I:\langle a^2 \rangle]$.

שאלה 4

יהי F שדה. הוכיחו כי $R = \left\{ \begin{pmatrix} c & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c, d \in F \right\}$ הוא חוג מקומי.

שאלה 5

יהי F שדה. מה הם ההפיכים ב $F[x]/\langle x^n \rangle$?

שאלה 6

נגדיר העתקה $\tau : R \rightarrow S^{-1}R$ ע"י $r \rightarrow \frac{r}{1}$. (כפי שהגדרנו בשיעור)

א. הראה שאיברי $\tau S = \left\{ \frac{s}{1} : s \in S \right\}$ הפיכים ב $S^{-1}R$.

נסמן $S^{-1} := \left\{ \frac{1}{s} : s \in S \right\}$, נגדיר את המכפלה של קבוצות $A, B \subseteq R$ ע"י

$$A \cdot B = \{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n : a_i \in A, b_i \in B\}$$

ב. תהיי $A \subseteq S^{-1}R$ תת קבוצה הסגורה לחיבור ולכפל באיברים של τS הראה שהמכפלה בתת

קבוצות של $S^{-1}R$ היא קבוצת המכפלות $S^{-1} \cdot A = \left\{ \frac{1}{s} \cdot a : s \in S, a \in A \right\}$.

ג. הראה ש $\tau : R \rightarrow S^{-1}R$ היא על אם ורק אם כל איברי S הפיכים כבר ב R .