בס״ד

שאלות חזרה:

1. לכל $(x,y)\in\Re^2$, נסמן ב $F(x,y)$ את וקטור היחידה המצביע מהנקודה (x,y) אל הראשית. חשב את העבודה הנעשית ע״י שדה הכח F על חלקיק שנע מהנקודה אל הנקודה לאורך החצי העליון של המעגל שמשוואתו היא $(x-a)^2+y^2=a^2$.
2. תהי $\gamma:[a,b]\to\Re^n$ מסילה גזירה ברציפות פעמיים ויהי $F:\Re^n\to\Re^n$ שדה וקטורי. את החוק השני של ניוטון ניתן לנסח כך: $F(\gamma(t))=m\gamma''(t)$ לכל $t\in[a,b]$.
הוכח כי העבודה שנעשית ע״י הכח הנתון ע״י השדה הוקטורי F על חלקיק שנע לאורך המסילה γ, מהנקודה $\gamma(a)$ ועד הנקודה $\gamma(b)$ היא $W=\frac{1}{2}mv(b)^2-\frac{1}{2}mv(a)^2$, כאשר $\Re^n$ היא המסה של החלקיק ו $v(t)=|\gamma'(t)|$.

3. א. הוכח כי אם α ו β הן שתי מסילות שקולות, גזירות ברציפות ואם ω היא תבנית דיפרנציאלית רציפה אז $\int_\alpha\omega=\int_\beta\omega$.

ב. הוכח כי אם $\alpha:[0,1]\to\Re^n$ מסילה גזירה ברציפות ונגדיר $\beta(t)=\alpha(1-t)$ לכל $t\in[0,1]$ אז $\int_\alpha\omega=-\int_\beta\omega$ לכל תבנית דיפרנציאלית רציפה ω

4. הוכח כי אם $\alpha:[a,b]\to\Re^n$ ו $\beta:[c,d]\to\Re^n$ מסילות חלקות וחד חד ערכיות בעלות אותו קו כך ש $\alpha(a)=\beta(c),\alpha(b)=\beta(d)$ אז הן שקולות זו לזו (במובן שהגדרנו בכיתה).

5. א. תהי $\omega=ydx+xdy+2dz$ תבנית ב $\Re^3$. מצא תבנית דיפרנציאלית מסדר 0, f, כך ש $df=\omega$.

ב. אם $\gamma:[a,b]\to\Re^3$ מסילה גזירה ברציפות מ $(1,0,1)$ אל $(0,1,-1)$, מהו הערך של $\int_\gamma\omega$

6. תהי $\gamma:[a,b]\to\Re^2$ מסילה חלקה. יהי T שדה וקטורי שנותן בכל נקודה וקטור משיק באורך יחידה: $T(\gamma(t))=\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ לכל $t\in[a,b]$. יהי N שדה וקטורי שנותן בכל נקודה

נורמל באורך יחידה : $N(\gamma(t)) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}(\gamma_2'(t), -\gamma'_1(t))$.

בהנתן שדה וקטורי $F=(f_1,f_2)$ המוגדר ב $\Re^2$ נסמן : $\omega = -f_2dx + f_1dy$.

$\int_\gamma \omega = \int_\gamma (F\cdot N)dr$. *הוכח כי* $\int_\gamma \omega = \int_\gamma F\cdot Ndr$.

7. יהיו f,g פונקציות גזירות ברציפות פעמיים, המוגדרות בקבוצה פתוחה המכילה את התחום ה"נח" D. נסמן ב N את השדה הוקטורי הנורמלי באורך יחידה לשפת D. הלפלסיאן של f מוגדר ע"י $\nabla^2 f = div(\nabla f)$ והנגזרת הנורמלית של f מוגדרת ע"י :

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f\cdot N .$$

הוכח : א. $\int\int_D (f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g)dxdy = \int_{\partial D} f\frac{\partial g}{\partial n}dr$.

ב. $\int\int_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)dxdy = \int_{\partial D}(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n})dr$

9. תהי $f:Q\to\Re$ כאשר Q היא תיבה ב $\Re^{n-1}$ הגרף של f הוא תמונת הפונקציה $F:Q\to\Re^n$ המוגדרת ע"י $F(x_1,...,x_{n-1}) = (x_1,...,x_{n-1}, f(x_1,...,x_{n-1}))$. הוכח כי "שטח" הגרף הוא :

$$\int_Q \sqrt{(1+\|\nabla f\|^2}dx_1\cdots dx_{n-1} .$$

.10

יהיו $Q = \frac{x\cos y}{x^2+\sin^2 y}$ $\quad P = \frac{-\sin y}{x^2+\sin^2 y}$.

יהי $D = \{ (x,y) \mid x>0 \}$ חצי המישור הימני.

יהי C מעגל היחידה (מכוון בכוון המתמטי החיובי) ונסמן $a = \oint_C Pdx + Qdy$.

א. (10 נקודות) הוכיחו כי $\mathbf{F} = (P,Q)$ שדה משמר בתחום D .

ב. (7 נקודות) הוכיחו כי $a>0$.

ג. (8 נקודות) מצאו את $b = \oint_\gamma Pdx + Qdy$ כאשר $\begin{cases} \gamma(t) = \left(\frac{1}{5}\sin t, 2+5\cos t\right) \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$.

האם $b>0$? $b=0$? $b<0$?

.11

נתון השדה הוקטורי $\mathrm{f}(\underline{\mathrm{r}}) = xy\underline{\mathrm{i}} + yz\underline{\mathrm{j}} + zx\underline{\mathrm{k}}$ (כרגיל $\underline{\mathrm{r}} = x\underline{\mathrm{i}} + y\underline{\mathrm{j}} + z\underline{\mathrm{k}}$)

והמשטח $S = \left\{ (x,y,z) \middle| x^2+y^2+z^2 = 4, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0 \right\}$.

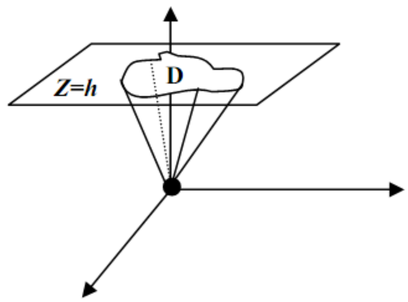
חשב את האינטגרל המשטחי $\iint_S \mathrm{f}(\underline{\mathrm{r}}) \bullet \underline{\mathrm{n}}\, d\mu$.

.12

העקומים $xy=4,\ xy=7,\ y=5x^2,\ y=8x^2$ חוסמים שטח המוקף בקו סגור C המורכב מקטעי עקומים אלה (ומכוון בכוון המתמטי החיובי). צייר מצב זה במערכת צירים וחשב את האינטגרל הקווי $\oint_C x^2 ydx + xy^3 dy$.

.13

סעיף א:



באיור שלפניך חרוט.

בסיס החרוט הוא התחום D במישור $z=h$.

שטח התחום D הוא A . קודקוד החרוט בראשית.

הוכח כי נפח החרוט הוא $\frac{Ah}{3}$.

היעזר במשפט גאוס או בתוצאות ממשפט גאוס.

סעיף ב:

חשב את האינטגרל המשטחי $\iint_S \left(\nabla\times \underline{f}\right)\cdot \underline{n}\, d\mu$.

השדה הוא $\underline{f}(x,y,z)=\left(y^2,x^2,z^2\right)$ והמשטח הוא S פני חצי הכדור $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ מעל המישור $z=1$. $\underline{n}$ נורמל יחידה חיצוני למשטח S .

(רמז: כדאי להיעזר במשפט הדיוורגנץ - משפט גאוס).

שאלה 14

א. מצא את השטח של האליפסה : $\{(x,y)\in\Re^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$. (רמז השתמש בנוסחת שינוי המשתנים עבור $u=\frac{x}{a}, v=\frac{y}{b}$.

ב. מצא את הנפח של האליפסואיד $\{(x,y,z)\in\Re^3 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\}$.

שאלה 15

א. מצא דוגמא לתבניות דיפרנציאליות מסדר ראשון, α,β הן תבניות דיפרנציאליות כך ש $\alpha\wedge\beta\ne\beta\wedge\alpha$.

ב. הראה שאם α מסדר ראשון ו β מסדר שני אז $\alpha\wedge\beta=\beta\wedge\alpha$.