פתרון אינפי 1 – תרגיל 8

שאלה 1

הוכיחו על פי הגדרת הגבול לפי קושי שמתקיים: $\lim_{x\to a}\frac{1}{x}=\frac{1}{a}$ עבור $a>0$.

פתרון

יהי $\varepsilon>0$. יש למצוא $\delta>0$ כך שאם $0<|x-a|<\delta$ אזי $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|<\varepsilon$. מתקיים:

$(*)\ \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\left|\frac{x-a}{xa}\right|<\frac{\delta}{|xa|}$. כעת עלינו לחסום את $\frac{1}{|xa|}$. מכיוון ש- $-\delta<x-a<\delta$ מתקיים $a-\delta<x<a+\delta$. נבחר $0<\delta<\frac{a}{2}$ ונקבל ש- $\frac{a}{2}<x<\frac{3a}{2}$. מכיוון ש- $a>0$ גם x בתחום הזה הוא חיובי. נכפיל ב- a ונקבל: $\frac{a^2}{2}<xa$. מכאן, $\frac{a^2}{2}<|xa|$ ו- $\frac{1}{|xa|}<\frac{2}{a^2}$. נציב זאת ב-(*) ונקבל: $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right|=\left|\frac{x-a}{xa}\right|<\frac{\delta}{|xa|}<\frac{2\delta}{a^2}$. לכן נבחר $0<\delta<\min\left\{\frac{a}{2},\frac{\varepsilon a^2}{2}\right\}$ ונקבל הדרוש.

מש"ל

שאלה 2

הוכיחו על פי הגדרת הגבול לפי קושי ש- $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{2}$.

פתרון

יהי $\varepsilon>0$ יש למצוא $\delta>0$ כך שאם $0<|x-1|<\delta$ אזי $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$. נפתח $\left|\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2-\sqrt{x}-1}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right|=\left|\frac{1-\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right|$. נרצה להיעזר בביטוי $0<|x-1|<\delta$ ולכן נרצה שהביטוי הזה יופיע בפיתוח שבשורות הקודמות. מתקיים:

$$\left|\frac{1-\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right|=\left|\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\right|=\left|\frac{1-x}{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\right|.$$

$$\left|\frac{1-x}{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\right| < \frac{\delta}{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}$$

אבל $\sqrt{x}+1\geq 1$ ולכן $\frac{1}{2\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}\leq\frac{1}{2}$ ולכן $\left|\frac{1-\sqrt{x}}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\right|<\frac{\delta}{2}$. ניקח $\delta=2\varepsilon$

ונקבל הדרוש.

מש"ל

שאלה 3

נסחו הגדרות לפי קושי ולפי היינה (שתי הגדרות לכל סעיף!) לכל אחד מן הביטויים הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=-\infty$

ב. $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=L\ \ ,L\in\mathbb{R}$

ג. $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=\infty\ \ ,a\in\mathbb{R}$

פתרון

	Cauchy	Heine
$\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)=-\infty$	$\forall M<0\ \ \exists N>0\ \ \ \forall x$ $(x>N\to f(x)<M)$	לכל סדרה $x_n\to\infty$ מתקיים $f\left(x_n\right)\to-\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=L\ \ ,L\in\mathbb{R}$	$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N<0\ \ \forall x$ $(x<N\to\mid f(x)-L\mid<\varepsilon)$	לכל סדרה $x_n\to-\infty$ מתקיים $f\left(x_n\right)\to L$
$\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=\infty\ \ ,a\in\mathbb{R}$	$\forall M>0\ \ \exists\varepsilon>0\ \ \forall x$ $\left(0<\mid x-a\mid<\varepsilon\to f\left(x\right)>M\right)$	לכל סדרה $a\neq x_n\to a$ מתקיים $f\left(x_n\right)\to\infty$

שאלה 4

מצאו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

פתרון

$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}=1$. שימו לב, אם $x\to\infty$ אזי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

ב. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

<u>פתרון</u>

תהי סדרה $x_n\to 0$. לכן $f(x_n)=x_n\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)$ ואז יש לנו סדרה חסומה כפול סדרה ששואפת לאפס ולכן לפי משפט $f(x_n)\to 0$. זה נכון לכל סדרה x_n כנ"ל ולכן לפי היינה הגבול הינו אפס.

ג. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(x-\sqrt{x^2-\pi^3}\right)$

<u>פתרון</u>

$x\to-\infty$, $\sqrt{x^2-\pi^3}\to\infty$ ולכן $x-\sqrt{x^2-\pi^3}\to-\infty$ ולכן $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(x-\sqrt{x^2-\pi^3}\right)=+\infty$.

ד. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$

<u>פתרון</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x}\cdot\frac{x}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin x\cdot\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=0$$

ה. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$ (רמז: השתמשו בזהות לזווית כפולה ובזהות להפרש קוסינוסים.)

<u>פתרון</u>

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi/6+x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi/6-x}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(\frac{x-\pi/6}{2}\right)\cos\left(\frac{x-\pi/6}{2}\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi/6+x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi/6-x}{2}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\left(\frac{x-\pi/6}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi/6+x}{2}\right)}=\frac{\cos(0)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}=2$$

ו. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sqrt{1-\cos x}}{\cos x}$

<u>פתרון</u>

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sqrt{1-\cos x}}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\sqrt{1-\cos x}\right)\left(1+\sqrt{1-\cos x}\right)}{\cos x\left(1+\sqrt{1-\cos x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-(1-\cos x)}{\cos x\left(1+\sqrt{1-\cos x}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos x)}{\cos x\left(1+\sqrt{1-\cos x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sqrt{1-\cos x}}=\frac{1}{1+\sqrt{1-\cos(\pi/2)}}=\frac{1}{2}$$

מש"ל