

**פיתרון לתרגיל מספר 4:**

**תשובה 1:**

$$\sum_{i=0}^4 P(X=i) = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^4 \frac{k-i}{3k} = 1$$
$$\sum_{i=0}^4 \frac{k-i}{3k} = \frac{k}{3k} + \frac{k-1}{3k} + \frac{k-2}{3k} + \frac{k-3}{3k} + \frac{k-4}{3k} = \frac{5k-10}{3k} = 1 \Rightarrow k=5$$

**תשובה 2:**

א. פונקציית ההתפלגות של  $Z = (X - 2)^2$

z	0	4	16	36	
P(z)	2/9	1/9+3/9	2/9	1/9	

מכאן ישירות מחשבים עפ"י הנוסחא את התוחלת והשונות:

$$E(Z) = 0 \cdot \frac{2}{9} + 4 \cdot \frac{4}{9} + 16 \cdot \frac{2}{9} + 36 \cdot \frac{1}{9} = \frac{28}{3}$$

$$Var(Z) \approx 120.9$$

להלן פונקציית ההתפלגות של  $Y = \frac{(X-2)}{(X+2)}$

y	-1	0	1/3	1/2	3/5
P(y)	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

$$E(Y) = -1 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{45}$$

$$Var(Y) \approx 0.2584$$

ב.

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{2}{3}\right) \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} =$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right) \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \left(\frac{3}{2}\right)$$

הסבר למעבר האחרון (כמו שעשינו בכיתה)

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p^{k-1} = \frac{d}{dp} \left(\sum_{k=0}^{\infty} p^k\right) = \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{1-p}\right) = \frac{1}{(1-p)^2}$$

**תשובה 3: (נפתרה בכיתה)**

מרחב המדגם מונה  $\binom{9}{4} = 126$  אפשרויות. הערכים האפשריים ל  $X$  הם: 1, 2, 3.

$$P(X = 1) = P(\text{four black}) = \frac{\binom{4}{4}}{\binom{9}{4}} = 1/126 = 0.007$$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2} + \binom{4}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{4}{1}\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{9}{4}} = 72/126 = 0.571$$

$$P(X = 2) = 1 - P(X = 1) - P(X = 3) = 53/126 = 0.42$$

**תשובה 4:**

א. (עם החזרה)

$P(X = k)$	$k$
$\left(\frac{20}{30}\right)^2$	0
$2 \frac{10}{30} \frac{20}{30}$	1
$\left(\frac{10}{30}\right)^2$	2

$$E[X] = 2 \frac{10}{30} \frac{20}{30} \cdot 1 + \left(\frac{10}{30}\right)^2 \cdot 2 = \frac{2}{3}, \quad E[X^2] = 2 \frac{10}{30} \frac{20}{30} \cdot 1^2 + \left(\frac{10}{30}\right)^2 \cdot 2^2 = \frac{8}{9}$$

$$Var[X] = \frac{8}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{81}$$

ב. (בלי החזרה)

$P(X = k)$	$k$
$\frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29}$	0
$2 \cdot \frac{20}{30} \cdot \frac{10}{29}$	1
$\frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29}$	2

$$E[X] = 2 \cdot \frac{20}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot 1 + \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot 2 = \frac{2}{3}, \quad E[X^2] = 2 \cdot \frac{20}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot 1^2 + \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot 2^2 = \frac{76}{87}$$

$$Var[X] = \frac{76}{87} - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

שימו לב . התוחלת זהה בשני הסעיפים, השונות משתנה במקרה של הוצאה עם או בלי החזרה.

### תשובה 5:

$Y \setminus X$	1	2	3	4	5	6	
1	1/36	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	11/36
2	0	1/36	1/18	1/18	1/18	1/18	9/36
3	0	0	1/36	1/18	1/18	1/18	7/36
4	0	0	0	1/36	1/18	1/18	5/36
5	0	0	0	0	1/36	1/18	3/36
6	0	0	0	0	0	1/36	1/36
	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	

ב. ניתן לחשב עבור כל משבצת את הערך של המשתנה המקרי  $X+Y$ , להכפיל בהסתברויות ולחבר, וניתן להשתמש גם בלינאריות של התוחלת  $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ , ולחשב את התוחלות לפי ההתפלגויות השוליות:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36} = 4.472$$

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{11}{36} + 2 \cdot \frac{9}{36} + 3 \cdot \frac{7}{36} + 4 \cdot \frac{5}{36} + 5 \cdot \frac{3}{36} + 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{91}{36} = 2.522$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 4.472 + 2.522 = 7.044$$

## תשובה 6:

נסמן ב-  $X$  (משתנה מקרי) את מספר זוגות הכרטיסים שישארו בקופסא.

נגדיר משתנה מיקרי  $X_k$  עבור  $k = 1, \dots, N$  באופן הבא:  $X_k = 1$  אם הזוג שכתוב עליו  $k$  נשאר בקופסא, אחרת  $X_k = 0$ . מכאן רואים שמתקיים  $X = \sum_{k=1}^N X_k$ . עתה,

$$E(X_k) = 1 \cdot P(X_k = 1) + 0 \cdot P(X_k = 0) = P(X_k = 1) = \binom{2N-2}{m} / \binom{2N}{m}$$

במונה: מספר האפשרויות לבחירת  $m$  כרטיסים מ-  $2N$  הכרטיסים שבקופסא למעט 2 הכרטיסים שרשום עליהם  $k$ .

$$E(X) = \sum_{k=1}^N E(X_k) = \sum_{k=1}^N \frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}} = N \cdot \frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N}{m}} = \frac{(2N-m)(2N-m-1)}{2(2N-1)} \quad \text{לבסוף}$$