פתרון תרגיל בית 6– חדווא 1

שאלה 1

הראה שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר בעזרת "תנאי הכרחי להתכנסות טורים":

א. $a_n = \frac{n^n}{n!2^n}$.

ב. $a_n = \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+n+1}$.

פתרון שאלה 1

משפט

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ולכן מספיק להראות ש $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ כדי להראות שהטור מתבדר.

סעיף א

נראה שהסדרה לא מתכנסת לאפס. $a_1 = \frac{1}{2}$. נוכיח שהסדרה מונוטונית עולה ואז כל איברי הסדרה גדולים מ $\frac{1}{2}$ ולכן גבול הסדרה לא יכול להיות אפס.

$$a_n = \frac{n^n}{n!2^n}, a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!2^{n+1}} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!2^{n+1}} \cdot \frac{n!2^n}{n^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{n!(n+1)\cdot 2^n \cdot 2} \cdot \frac{n!2^n}{n^n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^n}{2} \cdot \frac{1}{n^n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} > 1$$

האי שוויון האחרון נובע מכך שעבור כל $n \geq 2$ מתקיים $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 2$.

סעיף ב

נבצע כפל בצמוד כפי שראינו בתרגול ונקבל

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+n+1}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2+n+1}\right)}{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2+n+1}}$$

$$a_n = \frac{n^2+2n-n^2-n-1}{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2+n+1}}$$

$$a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2+n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0$$

שאלה 2

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס עבור הסדרות הבאות (היעזר במבחן ההשוואה הראשון):

א. $a_n=\frac{5+3\cdot(-1)^{n+1}}{2^n}$.

ב. $a_n=\frac{arctg(n)}{n^2+1}$.

<u>פתרון שאלה 2</u>

<u>מבחן השוואה ראשון</u>

יהיו נתונים שני טורים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

אם קיים n_0 טבעי כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $a_n\le b_n$ אזי:

א. מהתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ נובע התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

ב. מהתבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ נובע התבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$.

<u>סעיף א</u>

הסדרה $b_n=\frac{8}{2^n}$ היא סדרה הנדסית שמנתה קטנה מאחד ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס.

בנוסף $\frac{8}{2^n}\le\frac{5+3\cdot(-1)^{n+1}}{2^n}$ וממבחן ההשוואה הראשון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

<u>סעיף ב</u>

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס כאשר $b_n=\frac{\pi}{2n^2}$ ובנוסף $\frac{\pi}{2n^2}\le\frac{arctg(n)}{n^2+1}$ ולכן הטור $a_n=\frac{arctg(n)}{n^2+1}$ מתכנס.

<u>שאלה 3</u>

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס עבור הסדרות הבאות (היעזר במבחן ההשוואה השני):

א. $a_n=\frac{n^2+2}{3n^3+5n-4}$.

ב. $a_n=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

ג. $a_n=\frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$.

ד. $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

<u>מבחן השוואה שני</u>

יהיו נתונים שני טורים חיוביים $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ ונניח שהגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$ קיים. ($b_n\neq 0$ לכל n טבעי)

אזי:

א. אם $0 < L < \infty$. שני הטורים מתכנסים או מתבדרים יחד.

ב. אם $L = 0$ אז מהתכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ נובע התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ג. אם $L = \infty$ אז מהתבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ נובע התבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

<u>סעיף א</u>

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר כאשר $b_n = \frac{1}{n}$. $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^3+2n}{3n^3+5n-4} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}$ וממבחן ההשוואה השני נקבל שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{3n^3+5n-4}$ מתבדר.

<u>סעיף ב</u>

נשתמש במכפלה בצמוד $\frac{1}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר כאשר $b_n = \frac{1}{n}$. $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$.

ממבחן ההשוואה השני נקבל שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ מתבדר.

<u>סעיף ג</u>

נשתמש בנוסחאות כפל מקוצר $a^3-b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}\right)}$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס כאשר $b_n = \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$. $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^{\frac{7}{6}}}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}$.

ממבחן ההשוואה השני הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

<u>סעיף ד</u>

נשתמש במכפלה בצמוד $\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר כאשר $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$.

ממבחן ההשוואה השני נקבל שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ מתבדר.

<u>שאלה 4</u>

האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס עבור הסדרות הבאות (היעזר במבחן עיבוי):

א. $a_n = \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$. $n \geq 3$.

ב. $a_n = \frac{1}{n(\ln(n))^2}$. $n \geq 2$.

<u>פתרון שאלה 4</u>

אם האיברים של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הם חיובים ויורדים באופן מונוטוני, אזי הטור מתכנס או מתבדר יחד

עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

<u>סעיף א</u>

$$a_n = \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))} \Rightarrow 2^n a_{2^n} = \frac{2^n}{2^n \ln 2^n \ln(\ln 2^n)} = \frac{1}{n\ln 2 \cdot \ln(n\ln 2)} .$$

נסמן $b_n = \frac{1}{n\ln 2 \cdot \ln(n\ln 2)}$ ונשתמש שוב במבחן העיבוי

$$2^n b_{2^n} = \frac{2^n}{2^n \cdot \ln 2 \cdot \ln(2^n \ln 2)} = \frac{1}{\ln 2(n\ln 2 + \ln(\ln 2))} .$$

נשתמש במבחן ההשוואה השני. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר וממבחן ההשוואה השני נקבל שגם הטור

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln 2(n\ln 2 + \ln(\ln 2))}$ מתבדר וממבחן העיבוי נקבל שגם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln 2 \cdot \ln(n\ln 2)}$

מתבדר ושוב ממבחן העיבוי נקבל שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$ מתבדר.

<u>סעיף ב</u>

נשתמש במבחן העיבוי $a_n = \frac{1}{n(\ln(n))^2} \Rightarrow 2^n a_{2^n} = \frac{2^n}{2^n(\ln(2^n))^2} = \frac{1}{n^2 \ln^2 2}$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln^2 2}$

מתכנס ולכן גם הטור המקורי מתכנס.

בהצלחה!!!.