

משפט (עיקרון Heine): נניח (Y, ρ) , (X, d) מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f: X \rightarrow Y$ התנאים הבאים שקולים:

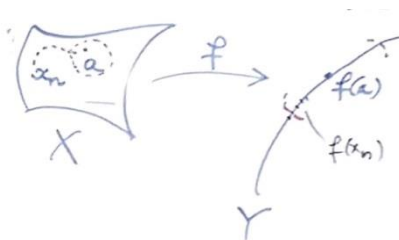
(1) רציפה.

(2) שומרת על התכנסות (כלומר, $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$).

(3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (ז"א, $\forall O \in \text{top}(\rho): f^{-1}(O) \in \text{top}(d)$)

הוכחה (עיקרון היינה):

(2) \Leftrightarrow (1)



נתון ש- $x_n \xrightarrow{d} a$ צ"ל - $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$

f רציפה $\Leftrightarrow f$ רציפה בנקודה $a \in X$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: f(B_\delta(a)) \subseteq B_\epsilon(f(a))$$

(הגדרת Cauchy).

לפי הגדרת התכנסות, כמעט כל האיברים של x_n נמצאים בכדור $B_\delta(a)$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: x_n \in B_\delta(a)$$

אז כמעט כל האיברים של הסדרה $f(x_n)$ נמצאים ב- ϵ -סביבה: $B_\epsilon(f(a))$

לכן הוכחנו: $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$

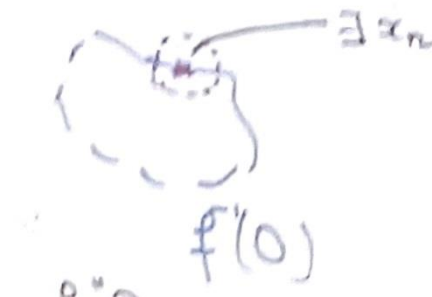
(3) \Leftrightarrow (2)

נניח בשלילה ש- (3) לא מתקיים. ז"א:

$$\exists O \in \text{top}(\rho): f^{-1}(O) \notin \text{top}(d)$$

כלומר O פתוחה בעוד ש- $f^{-1}(O)$ לא פתוחה ב- (X, d) .

ז"א קיימת נקודה "לא פנימית" - $\exists a \in f^{-1}(O): \forall \epsilon > 0 B_\epsilon(a) \not\subseteq f^{-1}(O)$



עבור כל $\epsilon := \frac{1}{n}$ קיים $x_n \in X$ כך ש -

$$\begin{cases} x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \\ x_n \notin f^{-1}(O) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d(a, x_n) < \frac{1}{n} \\ f(x_n) \notin O \end{cases}$$

מהשורה הראשונה נובע ש $d(a, x_n) < \frac{1}{n}$ ולכן $x_n \xrightarrow{d} a$.

על מנת לקבל סתירה, מספיק להוכיח - $f(x_n) \not\xrightarrow{\rho} f(a)$.

$f(a) \in O \in \text{top}(\rho)$ וכן O פתוחה ולכן $f(a)$ נקודה פנימית ב O .

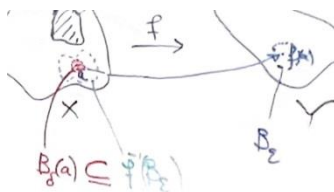
אז קיים $\epsilon > 0$ כך ש - $B_\epsilon(f(a)) \subseteq O$

אבל מהשורה השנייה מקודם $f(x_n) \notin O$ ולכן $f(x_n) \notin B_\epsilon(f(a))$. $\forall n$.

לכן - $f(x_n) \not\xrightarrow{\rho} f(a)$

(1) \Leftarrow (3)

בודקים את (1) - רציפות "דרך כדורים".



לכל $\epsilon > 0$ נתון - $O = B_\epsilon(f(a)) \in \text{top}(\rho)$ (למדנו שכל כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה).

לכן בגלל (3) - $f^{-1}(O) = f^{-1}(B_\epsilon(f(a))) \in \text{top}(d)$ גם פתוח.

אכן $a \in f^{-1}(O)$, ולכן a נקודה פנימית, אז קיים $\delta > 0$ כך ש -

$$B_\delta(a) \subseteq f^{-1}(O)$$

$$\Rightarrow f(B_\delta(a)) \subseteq f(f^{-1}(O)) \subseteq O = B_\epsilon(f(a))$$

הוכחנו!



הערה:

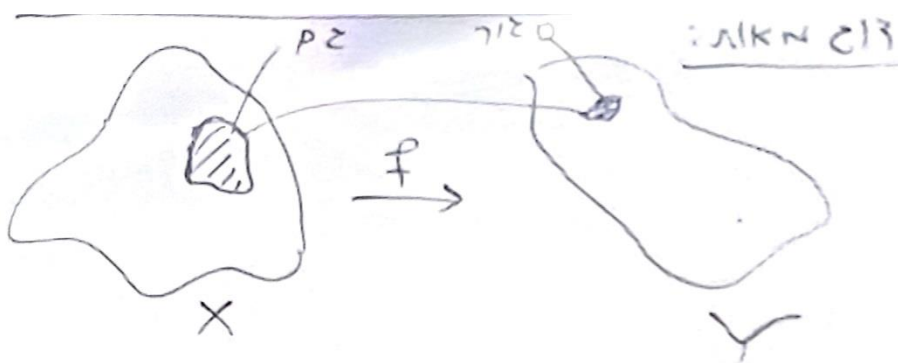
במשפט Heine שלמדנו (3 תנאים) אפשר להוסיף תנאי רביעי על קבוצות סגורות.

(4) מקור של קבוצה סגורה הוא גם סגור.

הסבר מקוצר: $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$

ובנוסף A סגורה אם ורק אם A^c פתוחה.

ולכן (3) \Leftrightarrow (4).



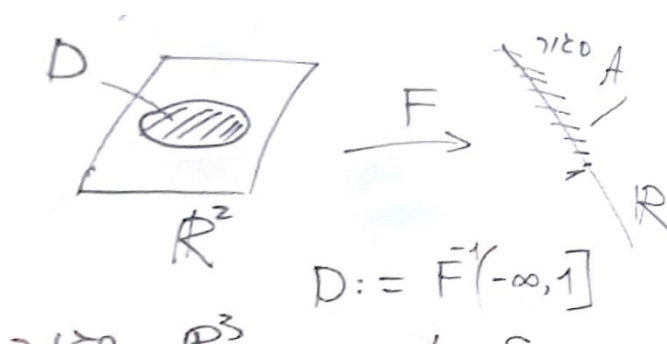
דוגמאות:

(1)

סגור ב- \mathbb{R}^2 $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$

הסבר: $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad F(x, y) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

רציפה (פונקציה פולינומיאלית!).



(2) כל מישור ב- \mathbb{R}^3 סגור. למשל –

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{2x + 3y - 4z + 5}_{F(x,y,z)} = 0 \right\}$$

סגור, כי את D ניתן לכתוב כ- $D = F^{-1}(0)$ ואכן $\{0\}$ סגור ב- \mathbb{R} .

(3) בכל מ"מ (X, d) :

$$B_r[a] := \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$$

$$S_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) = r\}$$

סגורות!

הסבר:

נגדיר פו' $f_a: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = d(a, x)$, זוהי פונקציית ליפשיץ – $f_a \in Lip_1 \subset C(X)$

$$f_a^{-1}(-\infty, r] = B_r[a] \text{ גם סגור!}$$

$$f_a^{-1}(\{r\}) = S_r(a) \text{ גם סגור!}$$

(4) $B_r(a)$ פתוחה (באופן דומה).

$$B_r(A) := \{x \in X \mid d(x, A) < r\} \text{ פתוחה.}$$

כאן יש צורך בפונקציית ליפשיץ $f_A(x) = d(x, A)$, $f_A: X \rightarrow \mathbb{R}$.



(5) $GL_n(\mathbb{R}) = \det(\mathbb{R}/\{0\})^{-1}$ מטריצות הפיכות, פתוחה במרחב של מטריצות ריבועיות.

$$Mat_n(\mathbb{R}) \stackrel{metr}{\simeq} \mathbb{R}^{n^2}$$

הגדרות: (X, d) מ"מ, $A \subseteq X$.

(א) "הסגור של A " ($Closure$ of A):

$$A \stackrel{m_1}{\subseteq} \bar{A} = cl(A) := \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$$

(ב) "סגור סדרתי" ($sequential$ closure):

$$A \stackrel{m_1}{\subseteq} scl(A) := \left\{ x \in X \mid \exists a_n \in A : x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right\}$$

סדרה קבועה
תמיד מתכנסת!

משפט 1: בכל מ"מ תמיד $scl(A) = cl(A)$.

הוכחה:

(\subseteq): נניח $z \in scl(A)$ אז –

$$\begin{cases} z = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ \exists a_n \in A \end{cases}$$

לפי הגדרה –

$$d(z, a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow d(z, \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = 0$$

המעבר נובע מהגדרת אינפימום.

$$\Rightarrow d(z, A) = 0$$

$$\Rightarrow z \in cl(A)$$

(\supseteq):

$$z \in cl(A)$$

$$\Rightarrow \inf_{a \in A} d(z, a) = d(z, A) = 0$$

(לפי הגדרת \inf).

נקבל שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $a_n \in A$ כך ש –

$$\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{0}_{=0} \leq d(z, a_n) \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0}$$

$$a_n \in A \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = z \in scl(A) \quad \text{מכאן –}$$

☺

משפט 2 (קריטריון סגירות במ"מ): נניח (X, d) מ"מ, $A \subseteq X$. התנאים הבאים שקולים:

(1) A סגורה ב- X (ז"א משלים לפתוחה).

(2) $A = scl(A)$ (A סגורה לגבי הגבולות).

(3) $A = cl(A)$.

(4) A "קבוצת אפסים" של פונ' רציפה (ז"א קיימת פ' רציפה $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $A = f^{-1}(0)$).

הוכחה:

$$:(2) \Leftarrow (1)$$

ניח בשלילה ש $A \neq scl(A)$.

אז (בגלל ש $A \subseteq scl(A)$) קיימת נק' -

$$\begin{cases} z \in scl(A) \\ z \notin A \end{cases}$$

לכן -

$$\begin{cases} z = \lim a_n, \exists a_n \in A \\ z \notin A \end{cases}$$

לכן -

$$\begin{cases} z = \lim a_n, \exists a_n \in A \\ z \in A^c \end{cases}$$

A סגורה (נתון). ז"א A^c פתוחה!

ואז z נקודה פנימית של A^c .

$$\Rightarrow \exists r > 0: B_r(z) \subseteq A^c$$

אז אף איבר של הסדרה a_n לא נמצא בכדור $B_r(z)$ וזאת סתירה ל -

$$\begin{cases} z = \lim a_n \\ a_n \in A \end{cases}$$

$$:(3) \Leftarrow (2)$$

בגלל משפט 1.

$$:(4) \Leftarrow (3)$$

נגדיר -

$$f_A(x) = d(x, A) \quad f_A: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ (רציפה!)}$$

אז -

$$f_A^{-1}(0) = \{x \in X | f_A(x) = 0\} = \{x \in X | d(x, A) = 0\} = cl(A) \stackrel{\text{נתון 3}}{=} A$$

$$f_A^{-1}(0) = A \text{ ולכן}$$

$$:(1) \Leftarrow (4)$$

נפעיל "תוספת למשפט Heine" (מקור לסגור גם סגור) $f_A^{-1}(0)$ -- מקור של נקודות.



הגדרה: במ"מ (X, d) עבור $A \subseteq X$, נגדיר –

$$A' := \{x \in X \mid x \in cl(A \setminus \{x\})\} \stackrel{metr}{=} \{x \in X \mid x \in scl(A \setminus \{x\})\}$$

נקודות ההצטברות של A .

תרגיל: הוכיחו ש $z \in A'$ אם ורק אם קיימת סדרה ב A עם איברים שונים שמתכנסת ב X לנקודה z .

רמז: ראו בהרצאה 2 טענה (על נקודה מבודדת) הוכחה של כיוון שני. תשתמשו בעובדה ש $d(z, A \setminus \{z\}) = 0$ על מנת לבנות סדרה מבוקשת (במקום העובדה בטענה ש z לא מבודדת).

תרגיל:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad (1)$$

$$A' = \{0\}$$

$$A'' = \emptyset$$

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right) \mid n, m \in \mathbb{N} \right\} \quad (2)$$

$$A' = \left\{ (0,0), \left(\frac{1}{n}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{m} \right) \right\}$$

$$A'' = \{(0,0)\}$$

$$A''' = \emptyset$$

תכונות (במ"מ): (לבדוק לבד!).

$$cl(A) = A \cup A'$$

$$A' \subseteq A \Leftrightarrow A \text{ סגורה}$$

הגדרה: אומרים שתת קבוצה A ב- X היא:

(א) "קבוצת G_δ " אם A שווה לחיתוך בן מנייה של קבוצות פתוחות.

$$(\exists O_n \in top(d), n \in \mathbb{N}: A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \text{ ז"א})$$

(ב) "קבוצת F_σ " אם A שווה לאיחוד בן מנייה של קבוצות סגורות.

$$(\forall n: P_n \text{ סגורה}, \exists P_n \subseteq X: A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n \text{ ז"א})$$

$$A \in G_\delta \Leftrightarrow A^c \in F_\sigma \quad \text{הערה:}$$

תרגיל:

"בעזרת פונקציה רציפה" הוכיחו שבמ"מ (X, d) :

(א) כל קבוצה סגורה היא G_δ .

(ב) כל קבוצה פתוחה היא F_σ .

תרגיל: הוכיחו 2 תכונות חשובות של שלמות:

(1) שלמות נשמרת בקבוצות סגורות

(אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלם כמת מ"מ).

(2) נניח (Y, d_Y) תת מרחב מטרי של (X, d) . אז אם (Y, d_Y) שלם אז סגורה ב X .

רמז: תת קבוצה היא סגורה \Leftrightarrow היא "סגורה בנוגע להתכנסות סדרות".

השלמה של מרחב מטרי

משפט (השלמה): לכל מ"מ (X, d) יש השלמה.

(בהמשך נציג 2 הוכחות (מקוצרות)).

הוכחה ראשונה מבוססת על –

משפט (שיכון למרחב Banach): לכל מ"מ (X, d) קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב Banach (= מ"מ שלם).

הוכחה:

למדנו על מרחב $(l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup})$ Banach \exists .

$$l_\infty(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ מוגדרת על } X\}$$

$$\|f\|_{sup} := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

נראה כי ניתן לשכן את X לתוך $l_\infty(X)$:

נגדיר –

$$\varphi: X \rightarrow l_\infty(X)$$

נבחר $z \in X$

$$a \mapsto \varphi(a) = \hat{a}$$

$$\hat{a}: X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\hat{a}(x) = d(a, x) - d(z, x)$$

$\hat{a} \in l_\infty(X)$, ז"א \hat{a} פונקציה חסומה כי –

$$|\hat{a}(x)| = |d(a, x) - d(z, x)| \leq \underbrace{d(a, z)}_{\text{קבוע}}$$

מ"ל

$$\forall a, b \in X: d(a, b) = \|\hat{a} - \hat{b}\|$$

$$\begin{aligned} \|\hat{a} - \hat{b}\| &= \sup_{x \in X} |(d(a, x) - d(z, x)) - (d(b, x) - d(z, x))| \\ &= \sup_{x \in X} |d(a, x) - d(b, x)| \leq d(a, b) \end{aligned}$$

מצד שני, אם נציב $x = b$ נקבל –

$$\sup_{x \in X} |d(a, x) - d(b, x)| \geq \sup_{x \in X} |d(a, b) - 0| = d(a, b)$$

לכן הוכחנו את השוויון.



השלמה של מ"מ (X, d) הוא שיכון איזומטרי $M \xrightarrow{i} (X, d)$, כאשר M מ"מ שלם ומתקיים:

$$\overline{i(X)} = M$$

הערה:

קל לבדוק שהסגור \bar{A} , של A שבמרחב X הוא תמיד קבוצה סגורה ב- X .
(וזוה נכון אפילו למרחבים טופולוגיים, נוכיח בהמשך).

משפט (השלמה): לכל מ"מ (X, d) יש השלמה.

הוכחה ב-2 דרכים:

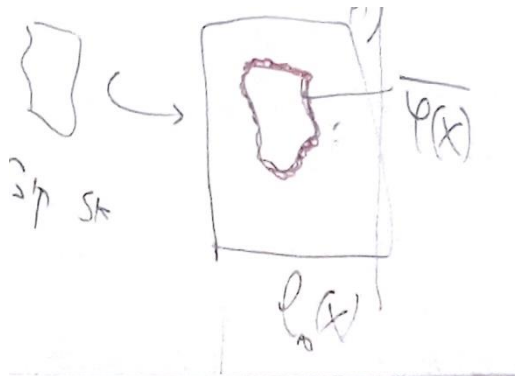
דרך א':

הוכחנו: לכל (X, d) קיים שיכון איזומטרי לתוך מרחב $Banach$ –

$$\varphi: X \rightarrow l_\infty(X)$$

$l_\infty(X)$ פונקציות חסומות וממשיות.

($l_\infty(X), \|\cdot\|_{sup}$) מרחב Banach.



$$\overline{\varphi(x)} \subset l_\infty(X)$$

קבוצה סגורה במרחב שלם ולכן גם שלם.

אז קיבלנו השלמה –

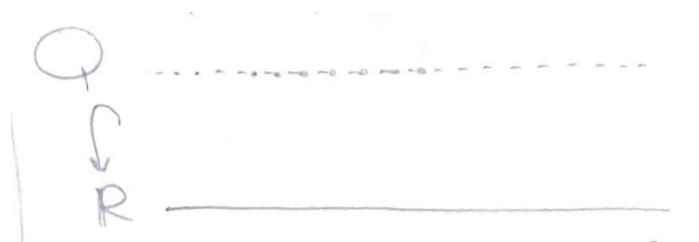
$$X \xrightarrow{\varphi} \overline{\varphi(X)}$$

■

דרך ב':

"דרך סדרות קושי".

דומה להשלמת $\mathbb{Q} \xrightarrow{i} \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.



שלב א': נגדיר – $\tilde{X} := \{(X, d) \text{ – סדרות קושי ב-}\}$

נגדיר פ' – מטריקה באופן טבעי:

$$x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{X}$$

$$\tilde{\rho}(x, y) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \quad \text{– נגדיר}$$

(הגבול קיים כי מדובר על סדרות קושי).

שלב ב':

טענת עזר: (מרחב מטרי מושרה ע"י מרחב פסאודו-מטרי)נניח (X, d) מרחב פסאודו-מטרי (כללי).

יוצרים מ"מ מנה שמקבלים באופן טבעי.

על המרחב פ' – מטרי (\tilde{X}, \tilde{d}) מגדירים יחס שקילות ("מרחק אפס"):

$$x \Omega y \stackrel{def}{=} \tilde{d}(x, y) = 0$$

נקבל קבוצת מנה:

$$M := \tilde{X} / \Omega = \{[x]\}$$

$$[x] := \{y \in \tilde{X} \mid \tilde{d}(x, y) = 0\}$$

נגדיר ב- M מרחק טבעי:

$$\rho([x], [y]) = \tilde{d}(x, y)$$

אין תלות בנציגים וזאת באמת מטריקה.

הפונקציה $(X, d) \rightarrow (\overline{X}, \overline{d}), x \mapsto [x]$ היא על ושומרת מרחקים.נפעיל טענת עזר על המרחב שלנו (X, d) .

נגדיר שיכון –

$$X \stackrel{i}{\hookrightarrow} M$$

$$x \mapsto [\tilde{x}]$$

כאשר \tilde{x} סדרה קבועה \dots, x, x, x . i – שיכון איזומטרי.

$$d(x, y) = \rho([\tilde{x}], [\tilde{y}])$$

$$\overline{i(X)} = M$$

וגם צפוף, ז"א כל איבר מ- M שווה לגבול שך סדרה מסוימת מ- $i(X)$. (M, ρ) מרחב שלם!.

דוגמאות:

$$\mathbb{Q}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n = \overline{\mathbb{Q}^n} \quad (1)$$

תזכורת: $X = (\mathbb{Z}, d_p)$ מ"מ לא שלם! (היה בתירגול)

$$x_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} \quad : p = 3$$

סדרת קושי שלא מתכנסת ב X .

(2) $(\mathbb{Z}, d_p) \hookrightarrow (\overline{\mathbb{Z}}, \overline{d_p})$ כאשר: השלמה היא

$$\overline{\mathbb{Z}} = \{ \text{מספרים } p\text{-אדיים} \} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k, b_k \in \underbrace{\{0, 1, \dots, p-1\}}_{\text{שאריות מודולו } p} = \mathbb{Z}_p \right\}$$

שהוא גם קומפקטי! (בעמם חבורה קומפקטית)

הגדרות: מ"מ (X, d) נקרא:

(א) "קומפקטי סדרתית" אם לכל סדרה ב X יש תת-סדרה מתכנסת ב X .

(ב) "קומפקטית" אם לכל כיסוי פתוח של X יש תת-כיסוי סופי.

הערה:

(1) נוכיח בהמשך שבמרחבים מטריים ההגדרות הנ"ל הן שקולות.

(2) נוכיח גם (בעצם אתם מכירים) את משפט היינה – בורל ($Heine - Borel$):

התנאים הבאים שקולים –

- $X \subset \mathbb{R}^n$ (כתת מרחב) הוא קומפקטי.
- X חסום וסגור.

תרגיל: הוכיחו שתת-קבוצה $X = \{e_n : n \in \{1, 2, \dots\}\}$ במרחב הילברט l_2 הוא חסום וסגור

אבל X לא קומפקטי כמרחב מטרי.

משפט: כל מ"מ קומפקטי הוא שלם.

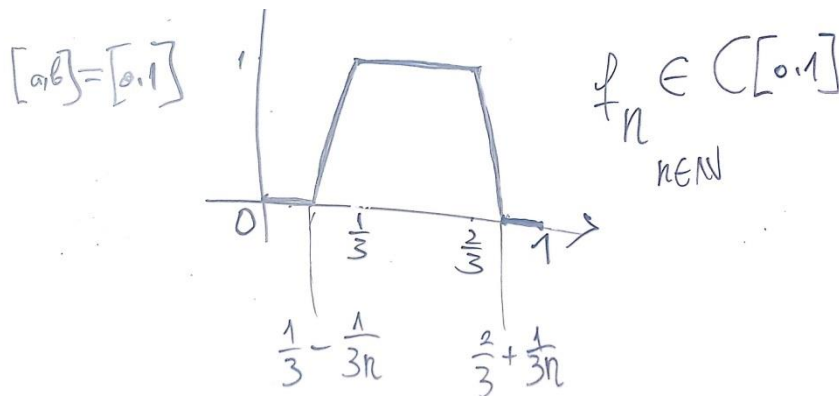
הוכחה מהירה:

- לכל ס"ק (סדרת קושי) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ יש ת"ס מתכנסת (הגדרת "קומפקטיות סדרתית").
- אם לס"ק יש ת"ס מתכנסת, אז גם ס"ק נתונה היא מתכנסת (תירגול).

המשך דוגמאות:

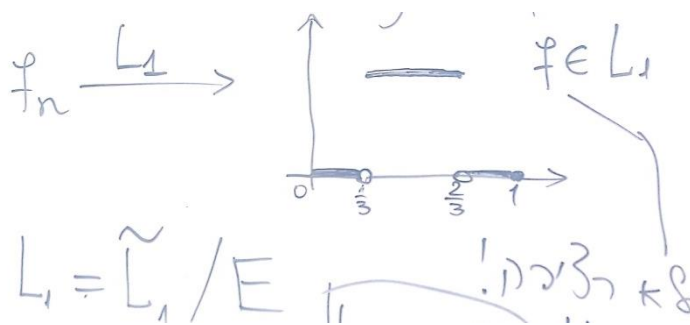
(3) $L_1[a, b] \xrightarrow[\text{השלמה}]{} (C[a, b], d_1)$, כאשר $L_1[a, b]$ פונקציות אינטגרביליות.

דוגמה: $(C[a, b], d_1)$ לא שלם!



(f_n) ס"ק ב- $(C[a, b], d_1)$ אבל לא מתכנסת ב- $(C[a, b], d_1)$.

כן מתכנס במרחב L_1 (גדול יותר) $L_1[a, b]$:



כאשר: $E = \{f \mid \int_a^b |f| dx = 0\}$

\tilde{L}_1 מרחב פסאודו-נורמי! (אומרים גם סמי-נורמי)

(4) $L_2[a, b] \xrightarrow[\text{השלמה}]{} (C[a, b], d_2)$. מקבלים מרחב הילברט.

הגדרה: A נקראת קבוצה **סגורה** (clopen) אם $\begin{cases} A \text{ פתוחה} \\ A \text{ סגורה} \end{cases}$

דוגמאות:

$$(1) A = (0,1) \text{ פתוחה ולא סגורה ב- } \mathbb{R} = X.$$

$$(2) A = [0,1] \text{ סגורה ולא פתוחה ב- } \mathbb{R} = X.$$

$$(3) A = [0,1) \text{ לא סגורה ולא פתוחה ב- } \mathbb{R} = X.$$

$$(4) \mathbb{R}, \emptyset \text{ סגורות ב- } \mathbb{R}.$$

הערה:

לכל מרחב (X, d) – \emptyset, X תמיד סגורות.

השאלה: האם יש עוד?

הגדרה: מרחב (X, d) נקרא **קשיר** (connected) אם קבוצות סגורות במרחב הן רק \emptyset, X .

שקול (לא קשיר אם"ם): $X = X_1 \cup X_2$ כך ש –

$$\begin{cases} X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset \\ X_1, X_2 \in \text{top}(d) \text{ (פתוחות)} \\ X_1 \cap X_2 = \emptyset \end{cases}$$

למשל: אם: $\mathbb{R} \supset \underbrace{X}_{\text{כתת מרחב}} = [2,4) \cup (5, \infty)$

אז X לא קשיר. שימו לב ש $(5, \infty)$ סגורה ב X (לא ב \mathbb{R}). דומה עבור $[2,4)$.

עוד דוגמה: במרחב מטרי של רציונליים (כתת מרחב בממשיים)

$$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$$

$$X_1 = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$$

$$X_2 = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \infty)$$

\mathbb{Q} לא קשיר. (יש אינסוף ת"ק סגורות).

תרגיל: הוכיחו שמרחב (\mathbb{Z}, d_p) (עם מטריקה p -אדית) הוא לא קשיר.