תרגיל 10

1. יהא X אינסופי עם הטופלוגיה הדיסקרטית. הוכיחו כי X אינו קומפקטי.
פתרון:
הנקודונים $\{\{x\} : x \in X\}$ הם כיסוי פתוח של X אבל אין תת כיסוי סופי כי X אינסופי.

2. הוכיחו כי l_∞ אינו קומפקטי (תזכורת $l_\infty = \{x : \sup|x_i| < \infty\}$). הדרכה: מצאו קבוצה סגורה שאינה קומפקטית.
פתרון:
נסתכל על $A = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ וקטורי היחידה. קבוצה זאת סגורה (ראינו, כי היא סגורה לגבולות כי כל סדרה מתכנסת היא קבוע לבסוף כי המרחק בין כל שני איברים שונים בקבוצה הוא 1) והטופולוגיה המצומצמת ל A היא הדיסקרטית. כיוון ש A לא סופי נקבל כי הוא לא קומפקטי.

3. הוכיחו כי $X = [0,1]$ עם הטופולוגיה המושרית מסונגפריי אינו קומפקטי.
פתרון:
הנקודון $\{1\} = X \cap [1,2)$ פתוח ב X. לכן $\{\{1\}\} \cup \left\{[0,1-\frac{1}{n})\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ הוא כיסוי פתוח של X אבל אין לו תת כיסוי סופי. (הקבוצות $[0,1-\frac{1}{n})$ הן שרשרת עולה ולכן איחוד סופי של כאלה קבוצות תהא הקבוצה "הגדולה" מביניהם.)

4. יהא X מ"ט, יהיו $\{A_i\}_{i\in I}$ מספר סופי של ת"מ קומפקטים. הוכיחו כי $\cup A_i$ קומפקטי גם כן.
פתרון:
יהא $\{O_k\}$ כיסוי פתוח של $\cup A_i$ אזי לכל i $\{O_k \cap A_i\}$ הוא כיסוי פתוח של A_i ולכן יש לו תת כיסוי סופי $\left\{O_{k_j} \cap A_i\right\}_{j\in I_i}$ בפרט $A_i \subseteq \cup O_{k_j}$. נאחד את כל הקבוצות הסופיות האלה $\left\{O_{k_j}\right\}_{j\in \cup I_i}$ ונקבל תת כיסוי סופי של $\cup A_i$.