נוסחת ההסתברות השלמה

יהי (Ω, P) מרחב הסתברות בדיד.

אזי:

$$\Omega = \dot{\bigcup} B_n$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P(A) = \sum_n P(A|B_n) \cdot P(B_n)}$$

הוכחה

$$A = \dot{\bigcup}(A \cap B_n) \quad , \quad P(A \cap B_n) = P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

$$\Downarrow$$

$$P(A) = P\left(\dot{\bigcup}(A \cap B_n)\right) = \sum_n P(A \cap B_n) = \sum_n P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

$$\blacksquare$$

מקרה פרטי

$$\Omega = B \dot{\cup} B^c$$

$$\Downarrow$$

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c)$$

$$\blacksquare$$

דוגמה

הסיכוי להצליח בקורס בהינתן שמשתתפים בשיעורים הוא 0.9.

הסיכוי להצליח בקורס בהינתן שלא משתתפים בשיעורים הוא 0.4.

הסיכוי להשתתף בשיעורים הוא 0.8.

<u>שאלה</u>: מה הסיכוי להצליח בקורס?

<u>פתרון</u>: נגדיר את המאורעות:

$A =$ {סטודנט מצליח בקורס}.

$B =$ {סטודנט משתתף בשיעורים}.

$$\boxed{P(A) = ?}$$

$$P(A|B) = 0.9 \quad , \quad P(A|B^c) = 0.4 \quad , \quad P(B) = 0.8$$

$$\Downarrow$$

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c)$$

$$P(A) = 0.9 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.8$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P(A) = 0.8}$$

דוגמה (פרדוקס סימפסון)

באוניברסיטה בקליפורניה נבדקה אפליית נשים. נמצא כי:

אחוז הבנות שמתקבלות ללימודים הוא 0.37.

אחוז הבנים שמתקבלים ללימודים הוא 0.44.

בתגובה, פרסמה הנהלת האוניברסיטה את הטבלה:

	$B =$ מדעים מדוייקים	$B^c =$ מדעי הרוח
$A =$ בנות	0.57	0.33
$A^c =$ בנים	0.50	0.28

<u>**שאלה:**</u> לכאורה, מסתמנת סתירה בין הנתונים. הסבר.

<u>**פתרון:**</u> נגדיר את המאורעות:

$C =$ סטודנט התקבל ללימודים.

$C^c =$ סטודנט לא התקבל ללימודים.

<u>נתון</u>:

$$P(C|A) = 0.37\,;\; P(C|A^c) = 0.44$$

$$P(C|A \cap B) = 0.57\,;\; P(C|A \cap B^c) = 0.33$$

$$P(C|A^c \cap B) = 0.50\,;\; P(C|A^c \cap B^c) = 0.28$$

$$P(B|A) = p\,; P(B|A^c) = p'$$

$$\Downarrow$$

$$P(C|A) = P(C|B \cap A) \cdot P(B|A) + P(C|B^c \cap A) \cdot P(B^c|A)$$

$$\Downarrow$$

$$0.37 = 0.57 \cdot p + 0.33 \cdot (1 - p)$$

$$\Downarrow$$

$$p = \frac{1}{6}$$

$$P(C|A^c) = P(C|B \cap A^c) \cdot P(B|A^c) + P(C|B^c \cap A^c) \cdot P(B^c|A^c)$$

$$\Downarrow$$

$$0.44 = 0.50 \cdot p' + 0.28 \cdot (1 - p')$$

$$\Downarrow$$

$$p' = \frac{8}{11}$$

$$\blacksquare$$

דוגמה

מטילים מטבעות עד ל - 1 הראשון, ואז בוחרים מטבע בהסתברויות שוות מאלו שהוטלו.

<u>שאלה:</u> מה הסיכוי לבחור את המטבע שכתוב עליו 1?

<u>פתרון:</u> נגדיר:

$A = $ {נבחר מטבע "1"}.

$\Omega = $ {סדרות של מטבעות שמסתיימות ב - 1 ובחירת אחד המטבעות}.

$B_n = $ {הוטלו n מטבעות}.

$$\boxed{P(A) = ?}$$

עפ"י נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n) \cdot P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot 2^{-n}$$

נסמן:

$$x = \frac{1}{2}$$

נגדיר:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} x^{m} = \frac{1}{1-x}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \int \frac{1}{1-x} = -\log(1-x)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P(A) = \log 2}$$

■

אי תלות סטטיסטית

הגדרה

יהיו $A, B \subseteq \Omega$ מאורעות.

נאמר ש - A, B **בלתי תלויים** (ב״ת) אם:

$$\boxed{P(A) = P(A|B)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$$

הערה

	A	A^c	
B	p	$\beta - p$	β
B^c	$\alpha - p$	$1 + p - \alpha - \beta$	$1 - \beta$
	α	$1 - \alpha$	

$$p = \alpha \cdot \beta$$

$$\Downarrow$$

	A	A^c	
B	$\alpha \cdot \beta$	$\beta \cdot (1 - \alpha)$	β
B^c	$\alpha \cdot (1 - \beta)$	$(1 - \alpha) \cdot (1 - \beta)$	$1 - \beta$
	α	$1 - \alpha$	

לכן:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\Updownarrow$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c)$$

$$\Updownarrow$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c) \cdot P(B)$$

$$\Updownarrow$$

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c)$$

כלומר:

A, B ב״ת $\Leftrightarrow$ A, B^c ב״ת $\Leftrightarrow$ A^c, B ב״ת $\Leftrightarrow$ A^c, B^c ב״ת

הגדרה

יהיו $A_n, \cdots, A_n \subseteq \Omega$.

נסמן: $A^0 = A$,$A^1 = A^c$.

נאמר ש - $A_1, \cdots, A_n$ **בלתי תלויים במשותף** אם:

$$\boxed{P\left(A_1^{\alpha_1} \cap \cdots \cap A_n^{\alpha_n}\right) = P\left(A_1^{\alpha_1}\right) \cdots P\left(A_n^{\alpha_n}\right)}$$

לכל $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \{0,1\}$.

ההגדרה מורידה את מספר דרגות החופש מ – $2^n - 1$ ל - n.

דוגמה

A_1, A_2 בלתי תלויים במשותף אם:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1) \cdot P(A_2^c)$$

$$P(A_1^c \cap A_2) = P(A_1^c) \cdot P(A_2)$$

$$P(A_1^c \cap A_2^c) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c)$$

$$\Updownarrow$$

A_1, A_2 ב"ת

■

דוגמה

<u>שני סוגי מטבעות</u>:

1. מטבע חוקי:

$$\left(\overbrace{\frac{1}{2}}^{"1"} ; \overbrace{\frac{1}{2}}^{"0"}\right)$$

2. מטבע מזויף:

$$\left(\overbrace{\frac{1}{3}}^{"1"} ; \overbrace{\frac{2}{3}}^{"0"}\right)$$

מטילים את המטבע ההוגן.

אם יצא 1, מטילים פעמיים את המטבע ההוגן.

אם יצא 0, מטילים פעמיים את המטבע המזויף.

נסמן:

$T=$ בשלב הראשון יצא 1.

$A=$ בשלב השני, במטבע הראשון יצא 1.

$B=$ בשלב השני, במטבע השני יצא 1.

$$P(B)=P(B|T)\cdot P(T)+P(B|T^c)\cdot P(T^c)$$

$$P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$$

אני מהמר על 1.

אני משלם שקל לכל סיבוב.

אם יוצא 0: הפסדתי.

אם יוצא 1: אני מקבל 2.4 שקלים.

<u>סיכום</u>

בהינתן T: A,B ב״ת. בהינתן T^c: A,B ב״ת.

אולם, A,B תלויים!

$$P(A)=P(B)=\frac{5}{12}$$

$$P(A\cap B)=P(A\cap B|T)\cdot P(T)+P(A\cap B|T^c)\cdot P(T^c)$$

$$P(A\cap B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{26}{144}\neq\frac{25}{144}=\frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12}$$

■

<u>תרגיל</u>: המציאו שלושה מאורעות שהם בלתי תלויים בזוגות אך אינם בלתי תלויים במשותף.

אם $A_1,\cdots,A_n$ בלתי תלויים במשותף, אז כל תת קבוצה שלהם בלתי תלויה במשותף.

<u>תרגיל</u>: המציאו שמונה מאורעות כך שכל ארבעה מאורעות הם בלתי תלויים במשותף אך לא כל חמישה מאורעות הם בלתי תלויים במשותף.