

שאלות לתרגיל 6:

1.

a. יהיו  $v_1 = (1, 0, 1, 0), v_2 = (0, 2, 1, 1), v_3 = (1, 2, 1, 2)$  ויהיה  $u = (x, y, z, w)$ . מצא תנאים על  $x, y, z, w$  (מערכת משוואות לינאריות) כך ש  $u$  יהיה שייך ל  $\text{Span}$  של  $v_1, v_2, v_3$ .

b. פתור את מערכת המשוואות שמצאת בסעיף א' על מנת לקבל וקטור כללי ב  $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$  (הוא וקטור הפתרון הכללי כמובן).

c. מצא מערכת משוואות דומה לסעיף א' עבור

$$w_1 = (1, 1, 0, 0), w_2 = (0, 1, 1, 0), w_3 = (0, 0, 1, 1)$$

d. נסמן  $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}, W = \text{span}\{w_1, w_2, w_3\}$  עבור הוקטורים מהסעיפים הקודמים. הוכח:  $u \in V \cap W$  אם ורק אם  $u$  מקיים את מערכת המשוואות שמכילה את כל המשוואות מסעיף א' וגם מסעיף ג'.

e. מצא בסיס ל  $V \cap W$  באמצעות פתרון המערכת מהסעיף הקודם.

הערה: התרגיל הזה הוא כמובן דוגמא פרטית לאלגוריתם כללי לחשב בסיס לחיתוך.

2. יהא  $M$  ויהיו  $A, B \subseteq V$  שתי קבוצות הוכח/הפוך:

a.  $A = \text{Span}(A)$  אם  $A$  תת מרחב וקטורי

b.  $\text{Span}(A \cap B) = \text{Span}(A) \cap \text{Span}(B)$

c.  $\text{Span}(A \cup B) = \text{Span}(A) \cup \text{Span}(B)$

d. אם  $A \subseteq B$  אזי  $\text{Span}(A) \subseteq \text{Span}(B)$

e. אם  $\text{Span}(A) = \text{Span}(B)$  אזי  $A \subseteq B$  או  $B \subseteq A$

f. אם  $\text{Span}(A) = V$  אזי  $B \subseteq A$

3.

a. יהיו  $p_1 = 1 + x + x^2 + x^3, p_2 = x^2 - 1, p_3 = 1 - x + x^2 - x^3$  פולינומים, ויהי

$$p_4 = 1 + x^2 + 2x^3$$

האם  $p_4 \in \text{Span}\{p_1, p_2, p_3\}$  ?

b. האם  $\{p_1, p_2, p_3\}$  מהסעיף הקודם בת"ל?

c. האם  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  מהסעיף הראשון בת"ל?

d. יהא  $V$  מ"ו כלשהוא, ויהיו  $v_1, \dots, v_n \in V$  וקטורים בת"ל, ויהיה וקטור  $u$  כך ש

$$u \notin \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$$

הוכח/הפוך:  $v_1, \dots, v_n, u$  בת"ל.

4. יהי  $\mathbb{R}_3[x]$  מרחב הפולינומים מדרגה קטנה או שווה ל-3. יהיו בסיסים סדורים

$$B = \{1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3\}, C = \{1+x, 1-x, x^2-x^3, x^2+x^3\}$$

(הסדר משמאל לימין)

$$[p]_B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \\ -2a \end{pmatrix} \quad \text{a. מצא את } p(0) \text{ אם נתון}$$

$$[5+x-7x^2+2x^3]_C, [5+x-7x^2+2x^3]_B \quad \text{b. מצא את}$$

$$[1+x^2]_C \quad \text{c. מצא את}$$

$$[I]_C^B, [I]_B^C \quad \text{d. מצא את מטריצות המעבר}$$

5. יהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  מרחב הפונקציות. הוכיחו כי לא קיים למרחב זה בסיס סופי (תניחו

בשלילה, אל תחפשו בסיס אינסופי)