<u>אלגברה לינארית למורים- פתרון תרגיל 3</u>

פתרון שאלה 1

קבעו האם המטריצות הבאות הם מדורגות או לא וסמנו מיהם האיברים המובילים:

האיברים המובילים מסומנים באדום

א. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$ - צורה מדורגת

ב. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$ - לא צורה מדורגת כי מתחת לאיבר המוביל המסומן אין רק אפסים

ג. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$ -לא צורה מדורגת כי שורות האפסים לא מופיעים בתחתית המטריצה

ד. $\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & -1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ -צורה מדורגת

פתרון שאלה 2

עבור אילו ערכי a יש למערכות הבאות פתרון יחיד/ אין פתרון/ אינסוף פתרונות?

א. $$\begin{cases} ax+ay-az=a \\ -x+4y-az=0 \\ 2x-8y+4z=1 \end{cases}$$

<u>פתרון</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a & -a & a \\ -1 & 4 & -a & 0 \\ 2 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -a & 0 \\ a & a & -a & a \\ 2 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3+2R_1 \to R_3]{R_2+aR_1 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -a & 0 \\ 0 & 5a & -a-a^2 & a \\ 0 & 0 & 4-2a & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -a & 0 \\ 0 & 5a & -a(1+a) & a \\ 0 & 0 & 2(2-a) & 1 \end{array}\right)$$

עבור $a=2$ נקבל שורת סתירה ולכן במקרה זה נקבל שאין פתרון

עבור $a=0$ נקבל מטריצה מהצורה: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right)$ נקבל כי יש משתנה חופשי ולכן במקרה זה יש אינסוף פתרונות

עבור $a \neq 0,2$ אין משתנים חופשיים ולכן זה מצב של פתרון יחיד

ב.
$$\begin{cases} 3x+y+az=0 \\ 6x+ay+(2a+1)z=1 \\ 9x+3y+(a^2+2)z=a-1 \end{cases}$$

<u>פתרון</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & a & 0 \\ 6 & a & 2a+1 & 1 \\ 9 & 3 & a^2+2 & a-1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a^2+2-3a & a-1 \end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & a-1 \end{array}\right)$$

עבור $a=2$ נקבל שורת סתירה ולכן במקרה זה נקבל שאין פתרון

עבור $a=1$ נקבל מטריצה מהצורה: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ נקבל כי יש משתנה חופשי ולכן במקרה זה יש אינסוף פתרונות

עבור $a\neq 1,2$ אין משתנים חופשיים ולכן זה מצב של פתרון יחיד