תכונות ($\boldsymbol{\partial}$,$\boldsymbol{int, cl}$, סביבות): במ"ט (X,τ)

1) $\forall\, a \in X: X \in N(a)$ (רמז: t_1).

2) חיתוך **סופי** של סביבות (פתוחות) גם סביבה (פתוחה). רמז: t_2.

3) $\begin{cases} U \in N(a) \\ V \supseteq U \end{cases} \Leftarrow V \in N(a)$

4) $\boxed{\underbrace{int(A)}_{A^\circ} \subseteq A \subseteq \underbrace{cl(A)}_{\bar{A}}}$.

5) לכל $A_1 \subseteq A_2$ מתקיים:

$int(A_1) \subseteq int(A_2)$

$cl(A_1) \subseteq cl(A_2)$

$scl(A_1) \subseteq scl(A_2)$

6) קריטריון לפתיחות : $\boxed{A \text{ פתוחה } \Leftrightarrow int(A) = A}$

רמז: t_3. $A = \bigcup_{a\in A} O_a$

7) קריטריון לסגירות: $\boxed{A \text{ סגורה } \Leftrightarrow cl(A) = A}$

8) $A^{\circ\circ} = A^\circ$. (ז"א: $\operatorname{int}(\operatorname{int}(A)) = \operatorname{int}(A)$)

9) $A^\circ \in \tau$ (ז"א A° תמיד פתוחה).

10) $\boxed{(A_1 \cap A_2)^\circ = A_1^\circ \cap A_2^\circ}$ (לכל מספר **סופי**).

11) A° = קב' פתוחה הכי גדולה בין תת קבוצות פתוחות של A, כלומר –

$$\bigcup\{O \subseteq X | O \subseteq A, O \in \tau\}$$

12) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ (ז"א $\operatorname{cl}(\operatorname{cl}(A)) = \operatorname{cl}(A)$)

13) $\bar{A}$ תמיד קב' סגורה.

14) $\bar{A}$ = קב' סגורה הכי קטנה בין קבוצות סגורות שמכילות את A, כלומר –

$$\bigcap\{B \subseteq X \big| B \supseteq A, \text{סגורה ב } X - B\}$$

15) (הפרשים) נניח O פתוחה, B סגורה. אזי:

א. $O \setminus B$ פתוחה. ב. $B \setminus O$ סגורה.

<u>הסבר:</u> $O \setminus B = O \cap B^c$ $B \setminus O = B \cap O^c$.

16) **<u>משפט הקשר</u>** בין הסגור והפנים. תמיד מתקיים:

א. $\boxed{cl(A^c) = \left(int(A)\right)^c}$

שקול: ב. $int(A^c) = \left(cl(A)\right)^c$

<u>הוכחה:</u> א $\Leftrightarrow$ ב כי נוכל להציב $A \coloneqq A^c$. <u>מ"ל (א)</u>

$$x \in \left(int(A)\right)^c$$
$$\Updownarrow$$
$$x \notin int(A)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\, U \in N(x) : U \nsubseteq A$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall\, U \in N(x) : U \cap A^c \neq \emptyset$$
$$\Updownarrow$$
$$x \in cl(A^c)$$

☺

17) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ (לכל מס' **סופי**).

<u>הגדרה:</u> השפה של A: $\partial(A) \coloneqq \overline{A} \setminus A^\circ$

18) $\partial(A) = \bar{A} \cap \overline{A^c}$.

<u>הסבר:</u> $\partial(A) = \overline{A} \setminus A^\circ = \bar{A} \cap (A^\circ)^c \underbrace{=}_{16.1} \bar{A} \cap \overline{A^c}$

19) $\partial(A)$ תמיד סגורה!

<u>הסבר:</u> כחיתוך של קבוצות סגורות (ראו 18).

20) $\boxed{\partial(A) = \partial(A^c)}$

21) (במ"מ (X,d)) $\partial(A) = \{x \in X | d(x,A) = 0, d(x,A^c) = 0\}$

<u>הסבר:</u> תכונות הסגור במ"מ.

הגדרה: א. תת קבוצה A במ"ט (X,τ) נקראת *צפופה* אם $cl(A)=X$.

שקול: לכל קבוצה פתוחה לא ריקה O מתקיים $A\cap O\neq\varnothing$.

ב. מ"ט (X,τ) נקרא ספרבילי אם קיימת ת"ק צפופה <u>ובת מניה</u>. סימון: $(X,\tau)\in \mathrm{Sep}$.

<u>תרגילים מומלצים:</u>

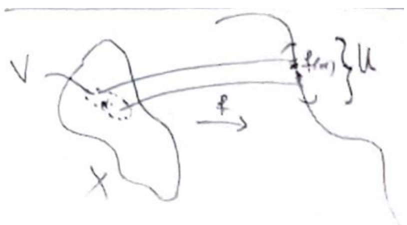
- מרחב טופולוגי בת מניה תמיד ספרבילי.
- $(X,\tau_{discr})\in \mathrm{Sep}$ אם ורק אם X בת מניה.
- חיתוך של 2 קבוצות פתוחות צפופות גם צפופה.
- יהי (X,d) מ"מ. תת קבוצה צפופה ב $(X,\mathrm{top(d)})$ אם"ם היא ε-צפופה לכל $\varepsilon>0$.
- אם מ"מ (X,d) הוא חסום כליל אז הוא ספרבילי. ז"א $(X,\mathrm{top(d)})\in \mathrm{Sep}$.

  הסיקו שאם (X,d) קומפקטי אז $(X,\mathrm{top(d)})\in \mathrm{Sep}$.

* * הוכיחו: $\mathbb{R}^n\in \mathrm{Sep}$ $\quad l_2\in \mathrm{Sep}$ $\quad l_\infty\notin \mathrm{Sep}$.

<u>רציפות פונקציות: תכונות נוספות</u>

<u>תזכורת: (רציפות בנקודה):</u> נניח שנתונה פו' בין מ"ט $(X,\tau)\xrightarrow{f}(Y,\sigma)$. f נקראת **רציפה בנקודה $a\in X$** אם: $\boxed{\forall\, U\in N(f(a))\ \exists\, V\in N(a)\colon f(V)\subseteq U}$



<u>שקול:</u> $\forall\, U\in N(f(a))\colon f^{-1}(U)\in N(a)$

(מילולית: מקור של סביבה (ל - $f(a)$) גם סביבה (ל – a)).

<u>משפט (קריטריון לרציפות):</u> נניח $(X,\tau)\xrightarrow{f}(Y,\sigma)$ פו' בין מ"ט. התנאים שקולים:

1) f רציפה (בכל נקודה).

2) מקור של כל קב' פתוחה גם פתוחה.

3) מקור של כל קב' סגורה גם סגור.

4) $\forall A \subseteq X: z \in cl(A) \Rightarrow f(z) \in cl\big(f(A)\big)$.

5) $f\big(cl(A)\big) \subseteq cl\big(f(A)\big)$.

<u>הוכחה:</u>

<u>(1) $\Leftarrow$ (2):</u>

נניח $O \in \sigma$. צ"ל - $f^{-1}(O) \in \tau$.

לכל $a \in f^{-1}(O)$ צ"ל ש $a \in int\big(f^{-1}(O)\big)$

(קריטריון לפתיחות: A פתוחה $\Leftrightarrow int(A) = A$).

$$a \in f^{-1}(O)$$

$$\Downarrow$$

$$f(a) \in O \in \sigma$$

$$\Downarrow$$

$$O \in N\big(f(a)\big)$$

$\Downarrow$ הגדרת הרציפות בנקודה a

$$a \in f^{-1}(O) \in N(a)$$

$\Downarrow$הגדרת נקודות פנים

$$a \in int\big(f^{-1}(O)\big)$$

<u>(2) $\Leftrightarrow$ (3):</u> כי $f^{-1}(A^c) = \big(f^{-1}(A)\big)^c$.

<u>(4) $\Leftrightarrow$ (5):</u> ברור.

<u>נוכיח (3) $\Leftarrow$ (5):</u>

נניח $A \subseteq X$. צ"ל – $f\big(cl(A)\big) \subseteq cl\big(f(A)\big)$.

$$A \subseteq f^{-1}\big(f(A)\big) \subseteq f^{-1}\Big(cl\big(f(A)\big)\Big)$$

המעבר האחרון נובע מזה ש - $f(A) \subseteq cl\big(f(A)\big)$. נפעיל "$cl$" בשני האגפים:

$$cl(A) \subseteq cl\left(f^{-1}\Big(cl\big(f(A)\big)\Big)\right) \overset{(*)}{=} f^{-1}\Big(cl\big(f(A)\big)\Big)$$

(בהפעלת cl יש "מונוטוניות" – $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow cl(A_1) \subseteq cl(A_2)$).

<u>הסבר $(*)$:</u>

א) $cl(B)$ סגור.

ב) נתון (3).

ג) B סגור $\Leftrightarrow cl(B) = B$.

כעת, נפעיל f על שני האגפים לקבל:

$$f\big(cl(A)\big) \subseteq ff^{-1}\Big(cl\big(f(A)\big)\Big) \subseteq cl\big(f(A)\big)$$

<u>נוכיח (4) $\Leftarrow$ (1):</u>

נניח בשלילה ש - (1) לא נכון. ז"א, f לא רציפה בנקודה מסוימת $a \in X$.

ז"א, קיימת <u>סביבה פתוחה</u> U של $f(a)$ כך ש - $f^{-1}(U) \notin N(a)$.

שקול: $a \notin int\big(f^{-1}(U)\big)$

שקול: $cl\left(f^{-1}(U)^c\right) \underbrace{=}_{\text{תכונת הקשר}} \Big(int\big(f^{-1}(U)\big)\Big)^c \ni a$

בגלל נתון (4) נקבל:

$$f(a) \in cl\big(f(f^{-1}(U)^c)\big) = cl\big(f(f^{-1}(U^c))\big) \subseteq cl(U^c) = U^c$$

(המעבר האחרון נובע כי U פתוחה ולכן Y/U סגורה וסגור של סגורה שווה לעצמה).

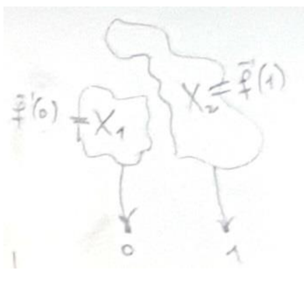
קיבלנו: $f(a) \notin U$ בסתירה לנתון!

☺

<u>משפט:</u> התנאים הבאים שקולים:

1) $(X,\tau) \notin Conn$ (ז"א לא קשיר).

2) קיימת פונקציה רציפה – $X \xrightarrow{f} [0,1]$ כך ש $f(X) = \{0,1\}$



<u>הוכחה</u>: לפי משפט רציפות ש"ל מקור של קבוצה פתוחה גם פתוח (יש 4 מקרים...)

$$f^{-1}(O)=\begin{cases} X & \{0,1\}\subset O \\ \varnothing & \{0,1\}\cap O=\varnothing \\ X_1 & \{0,1\}\cap O=\{0\} \\ X_2 & \{0,1\}\cap O=\{1\} \end{cases}$$

☺

<u>שימו לב</u>: אין תכונת ערך ביניים! בהמשך זה נותן מחצית ל-"משפט ערך ביניים".

<u>תרגיל</u>: הוכיחו (הכללת המשפט הקודם) נקודות אי-רציפות של פונקציה האופיינת χ_A של $A\subseteq X$ היא $\partial(A)$. כאשר:

$$\chi_A : X \to \{0,1\},\ \chi_A(a)=1 \quad \forall a\in A, \quad \chi_A(\mathrm{x})=0 \quad \forall x\notin A$$

<u>משפט:</u> (Heine-$\frac{1}{2}$) כל f רציפה שומרת על התכנסות סדרות.

<u>הוכחה:</u> $f(x_n)\xrightarrow{\sigma} f(a) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{צריך להוכיח}} \quad x_n \xrightarrow{\tau} a$

שקול להוכיח – $\forall\, U\in N\big(f(a)\big)\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}\colon \forall n\ge n_0\colon f(x_n)\in U$

עבור $U\in N\big(f(a)\big)$ המקור $f^{-1}(U)\in N(a)$ (בגלל רציפות f בנקודה a).

נתון – $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

וגם ידוע $f^{-1}(U)\in N(a)$ ולכן קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך ש – $x_n\in f^{-1}(U)$

מכאן – $\forall n\ge n_0\colon f(x_n)\in U$

☺

<u>הערה חשובה:</u> במ"מ ההיפך גם נכון! (עיקרון $Heine$). אבל זה לא תמיד נכון במ"ט.

<u>דוגמה מתאימה (תזכורת):</u>

$$X \coloneqq \mathbb{R}\cup\{p\},\ p\notin\mathbb{R}$$

$(X,\tau) \in T_2 \qquad \tau \coloneqq \{O \subseteq X | p \in O \Rightarrow |X/O| \leq \aleph_0\}$

(נשים לב ש - $\forall x \neq p\colon \{x\} \in \tau$).

<u>שימו לב:</u>

1) τ לא דיסקרטית (נק' p לא מבודדת).

2) תת מרחב $\mathbb{R}$ ביחס ל – τ הוא דיסקרטי.

3) במרחב (X,τ) יש רק התכנסות טריוויאלית של סדרות

(ז"א $x_n \xrightarrow{\tau} a \Leftrightarrow x_n$ קבועה <u>לבסוף</u> $= a$).

<u>הסבר של 3:</u>

מ"ל רק עבור $a = p$ (מדוע? כי כל נקודה אחרת היא מבודדת ואז ניתן לקחת את הנקודה בתפקיד של סביבה ואז מהגדרת התכנסות לפי סביבות).

צריך להוכיח שאם סדרה a_n ב X שואפת ל p אז הסדרה קבועה לבסוף. נסמן

$A \coloneqq \{a_n : \mathrm{n} \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{R}$. ברור ש A בת מניה. נגדיר $U \coloneqq X \setminus A$. אז $U \in N(p)$.

מצד שני לפי הגדרת $\lim a_n = p$ כמעט כל האיברים של הסדרה נמצאים ב U.

נזכיר $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ $\;U \cap A = \varnothing$. לכן כמעט כל האיברים של הסדרה הם p.

נגדיר – $(X,\tau_{discr}) \xrightarrow{f=id} (X,\tau)$. אז הפונקציה הזאת –

א) לא רציפה

ב) f שומרת על התכנסות

קיבלנו שעיקרון $Heine$ כאן לא מתקיים!

<u>עוד מסקנה:</u> $(X,\tau) \notin Metriz$

(כי בין מרחבים מטריזביליים עיקרון $Heine$, כן תמיד נכון!).

<u>תכונות נוספות של פונקציות רציפות:</u>

- כל $(Y,\sigma) \xleftarrow{f} (X,\tau_{discr})$ תמיד רציפה.
- כל $(Y,\tau_{tr}) \xleftarrow{f} (X,\tau)$ תמיד רציפה.

- הרכבה $f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_3$ של פונקציות רציפות $f_1 : X_1 \to X_2$ $f_2 : X_2 \to X_3$ היא גם רציפה.
- הוכיחו שבכל במ"ט (X,τ) ולכל $f_1, f_2 \in C(X)$ מתקיים :

א) $f_1 + f_2 \in C(X)$.

ב) $f_1 \cdot f_2 \in C(X)$.

ג) $\frac{f_1}{f_2} \in C(X)$ בתנאי ש - $f_2(x) \neq 0$ לכל $x \in X$.

הערה: נוח לבדוק "דרך סביבות".

<u>משפט (תורשתיות של רציפות):</u> $f : X \to Y$ רציפה, $\emptyset \neq A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ כך ש - $f(A) \subseteq B$. אזי פונקציה מושרית –

$$\boxed{\begin{matrix} A \overset{f_0}{\to} B \\ a \mapsto f(a) \end{matrix}}$$

גם רציפה.

<u>הוכחה:</u>

בודקים לפי קריטריון רציפות מספר 2 (ז"א מקור של קבוצה פתוחה הוא גם פתוח).

צ"ל שלכל קבוצה פתוחה $O \cap B$ (כאשר $O \in \tau_Y$) ב – B מתקיים $f_0^{-1}(O \cap B)$ פתוחה ב- A.

$$\begin{aligned} f_0^{-1}(O \cap B) &= \{x \in A | f(x) \in O \cap B\} = f^{-1}(O \cap B) \cap A \\ &= f^{-1}(O) \cap f^{-1}(B) \cap A \underbrace{=}_{f(A) \subseteq B} \underbrace{f^{-1}(O)}_{\substack{X - \text{פתוחה ב} \\ f \text{ בגלל רציפות}}} \cap A \end{aligned}$$

לכן $f^{-1}(O) \cap A$ קבוצה פתוחה ב – A (תת מרחב).

☺

שאלה כללית: איזו תכונות נשמרות על ידי "תמונה רציפה" ?

(פונקציה <u>רציפה על</u> $f : X \to Y = f(X)$)

בהמשך נוכיח זאת עבור מספר תכונות. למשל :

קומפקטיות, קומפקטיות סדרתית, קשירות, ספרביליות

בינתיים מומלץ לנסות לבד !

<u>משפט:</u> צפיפות וספרביליות נשמרות על ידי תמונה רציפה.

<u>הוכחה:</u>

נניח $f: X \to Y$ רציפה <u>על</u>, ז"א $f(X) = Y$.

צ"ל $\quad \bar{A} = X \Leftarrow \overline{f(A)} = Y$.

שקול להוכיח $\overline{f(A)} = f(X)$.

לפי קריטריון (5) של רציפות מתקיים: $\quad f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

נציב $\bar{A} = X$ ונקבל $f(X) \subseteq \overline{f(A)}$.

מצד שני, $\overline{f(A)} \subseteq Y = f(X)$.

לכן קיבלנו: $\quad \overline{f(A)} = f(X) = Y$

והוכחנו שנשמרת צפיפות.

עכשיו אם ניקח $X \in Sep$ אז קיים $A \subseteq X$ כך ש - $|A| \le \aleph_0$, $\bar{A} = X$.

אז – $\overline{f(A)} = f(X) = Y$.

$|f(A)| \le \aleph_0$ גם בת מנייה! $\quad$ מכאן גם $Y \in Sep$.

☺

איזומורפיזמים במרחבים טופולוגיים

תזכורת: איזומורפיזם ב - $Metr$ = איזומטריות.

איזומורפיזם ב - TOP = $homeomorphism$.

הגדרה: נניח $(X_1,\tau_1) \xrightarrow{f} (X_2,\tau_2)$ פונקציה בין מ"ט. f נקרא **הומיאומורפיזם**

(*Homeomorphism* *אזהרה: זה לא* Homomorphism)

אם מתקיימים שלושת התנאים הבאים:

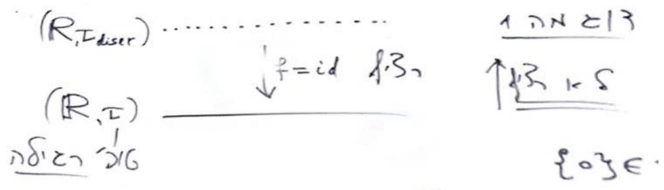
א) f חח"ע + על (ז"א קיימת פונקציה f^{-1}).

ב) f רציפה.

ג) f^{-1} רציפה.

הערה: $\begin{cases}(\text{א})\\(\text{ב})\end{cases} \not\Rightarrow (\text{ג})$

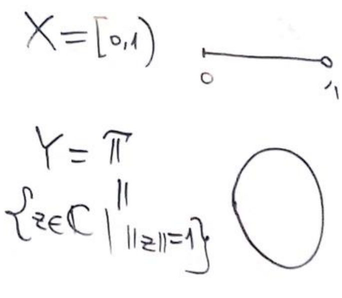
דוגמה 1:



$f=id:\mathbb{R}\to(\mathbb{R},\tau_{discr})$ רציפה אבל לא $f^{-1}:(\mathbb{R},\tau_{discr})\to\mathbb{R}$.

$\tau_{discr} \ni \{0\}$ אבל $f^{-1}(0)=\{0\}\notin\tau$.

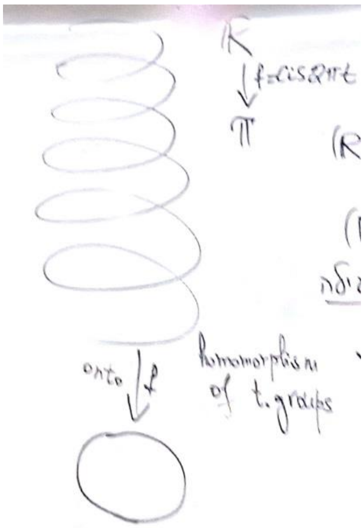
דוגמה 2:

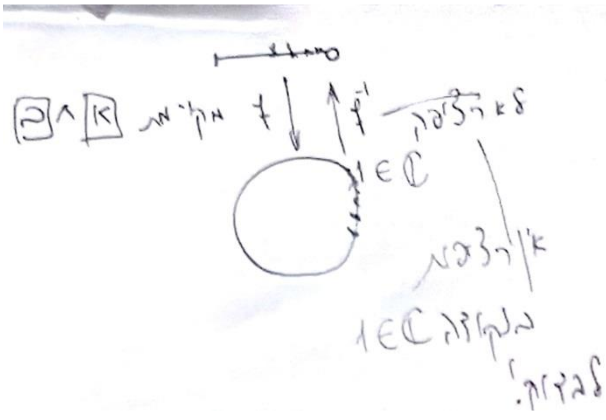


נגדיר $q:\mathbb{R}\to \mathrm{T}:=\{z\in \mathbb{C}:\| z\|=1\},\quad q(\mathrm{t})=cis(2\pi t)=\cos(2\pi t)+i\sin(2\pi t)$

זאת פונקציה רציפה (וגם הומומורפיזם חבורות).

כעת נגדיר צמצום של פונקציה הנ"ל $\mathrm{f}:[0,1)\to \mathrm{T}$.





אז $\mathrm{f}:[0,1)\to \mathrm{T}$ רציפה חח"ע ועל

אבל $\mathrm{f}^{-1}:\mathrm{T}\to[0,1)$ לא רציפה בנקודה $z=0\in T$.

(למצוא תת קבוצה פתוחה (סגורה) ב $[0,1)$ כך שהמקור לא פתוחה (לא סגורה) ב T)

<u>**הגדרה**</u>: פונקציה $\mathrm{f}:\mathrm{X}\to Y$ נקראת פתוחה אם תמונה של ת"ק פתוחה היא פתוחה.

באופן דומה מגדירים פונקציה סגורה.

<u>שימו לב</u>: נניח $\mathrm{f}:\mathrm{X}\to Y$ פונקציה רציפה חח"ע ועל. אז הפונקציה הומיאומורפיזם אם"ם היא סגורה (פתוחה).

<u>דוגמאות:</u>

- הפונקציה הנ"ל $\mathrm{f}:[0,1)\to \mathrm{T}$ היא לא פתוחה ולא סגורה.
- היטל $\mathrm{p}_1:\mathbb{R}^2\to \mathbb{R},(x_1,x_2)\mapsto x_1$ רציפה, על, פתוחה, אבל לא סגורה.
- $f(x)=\begin{cases} x & x\in[0,1] \\ 1 & x\in[2,3] \end{cases}\quad \mathrm{f}:[0,1]\cup[2,3]\to[0,1]$ רציפה על סגורה לא פתוחה.
- $f(x)=\begin{cases} x & x\in[0,1] \\ 1 & x\in[1,3] \end{cases}\quad \mathrm{f}:[0,3]\to[0,1]$ רציפה על סגורה לא פתוחה