מופשטת 1 תשע"ו ־ תרגיל בית 3־ פתרון

2 בנובמבר 2015

תרגיל 1:
א. תהי G חבורה סופית, $a,b\in G$. הוכיחו: $o(ab)=o(ba)$.
רמז: אם $o(ab)=n$, הסתכלו על $(ba)^{n+1}$.
ב. תהי G חבורה, $g\in G$ כך ש $o(g)=n$. הוכיחו: $a\equiv b \mod n \iff g^a=g^b$.

פתרון:
א. מספיק להוכיח ש $o(ba)\le o(ab)$ כי ההוכחה לכיוון השני זהה.
ובכן, נסמן $o(ab)=n$. נסתכל על $(ba)^{n+1}$. $(ba)^{n+1}=baba...ba=b(ab...ab)a=bea=ba$. לכן $(ba)^n=e$. כלומר, $o(ba)\le n$. מש"ל.
ב. $\Leftarrow$נניח $a\equiv b \mod n$. אזי, קיים m שלם כך ש־ $(a-b)=mn$. נסתכל על g^{a-b}. $g^{a-b}=g^{mn}=(g^n)^m=e^m=e$. כעת נכפיל את המשוואה ב$g^b$ כדי לקבל $g^a=g^b$.
$\Rightarrow$נניח $g^a=g^b$. אז, $g^{a-b}=e$. מתכונות הסדר, ידוע שזה גורר $n|a-b$. כלומר, $a\equiv b \mod n$.

תרגיל 2:
א. נגדיר $G=\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}:a,b,c\in\mathbb{Z}_3\right\}$. הוכיחו ש$G$ חבורה ביחס לפעולת כפל מטריצות. חשבו את הסדר של G ואת הסדר של כל איבר ב G.
ב. תהי G חבורה כך שלכל $a,b\in G$ מתקיים $(ab)^3=a^3b^3$. האם בהכרח G אבלית?

פתרון:
א. יהיו $\begin{pmatrix}1&d&e\\0&1&f\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}$ שתי מטריצות בG. צריך להראות שגם הכפל שלהן בG, כלומר, מהצורה הנ"ל.

$$\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&d&e\\0&1&f\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&d+a&e+af+b\\0&1&f+c\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

מכיוון שיש 3 איברים ב$\mathbb{Z}_3$ סדר החבורה הוא 27. (כי יש 3 אפשרויות לבחור כל משתנה.)
נחשב את הסדר של איבר כללי: $\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&2a&2b+ac\\0&1&2c\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&3a&3b+3ac\\0&1&3c\\0&0&1\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. קל לראות שאיבר בריבוע יהיה שווה 0 אמ"ם מלכתכילה זאת הייתה מטריצת היחידה, ולכן הסדר של כל האיברים הוא 3.

ב. לא. החבורה שהגדרנו בסעיף א' מקיימת את הדרישה, אך אינה אבלית.

תרגיל 3:

אילו מן החבורות הבאות הן ציקליות? עבור החבורות הציקליות מצאו יוצר, אחרת הסבירו מדוע החבורה אינה ציקלית.

א. $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15}$

ב. $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2$

ג. U_{20}

ד. $U_8 \times U_9$

ה. $U_{10} \times \mathbb{Z}_5$

פתרון:

נזכר במשפט שאומר: חבורה מסדר n היא ציקלית אמ"ם קיים בה איבר מסדר n.

א. הסדר של $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15}$ הוא 150. אולם, קל לראות שכל איבר בחבורה כפול 30 שווה 0. כלומר, הסדר של כל איבר בחבורה קטן או שווה ל30.

ב. הסדר של החבורה הוא 10, וגם $(1,1)$ הוא איבר מסדר 10. לכן החבורה ציקלית ונוצרת ע"י $(1,1)$.

ג. $U_{20} = \{1,3,7,9,11,13,17,19\}$. כלומר, $|U_{20}| = 8$. בידקו שאין אף איבר מסדר 8 בU_{20}.

ד. $U_8 = \{1,3,5,7\}, U_9 = \{1,2,4,5,7,8\}$. לכן $|U_8 \times U_9| = 24$. אולם הסדר של כל איבר קטן או שווה ל12.

ה. $U_{10} = \{1,3,7,9\}$. לכן $|U_{10} \times \mathbb{Z}_5| = 20$. בדקו שהסדר של $(3,1)$ הוא 20. (שימו לב שהפעולה בU_{10} היא כפל של מספרים, בעוד הפעולה ב$\mathbb{Z}_5$ היא חיבור).

תרגיל 4:

א. תהיינה H, G_1, G_2 תת חבורות של G. הוכיחו שאם $H \subseteq G_1 \cup G_2$ אז $H \subseteq G_1$ או $H \subseteq G_2$.

ב. תנו דוגמא לחבורה G ותת חבורות H, G_1, G_2, G_3 כך ש $H \subseteq G_1 \cup G_2 \cup G_3$ אבל לכל $i \in \{1,2,3\}$ $H \nsubseteq G_i$.

פתרון:

א. נניח בשלילה ש $H \nsubseteq G_1, G_2$. כלומר, יש $h_1, h_2 \in H$ כך ש: $h_1 \in G_1 \setminus G_2$ ו $h_2 \in G_2 \setminus G_1$. H חבורה ולכן $h_1 h_2 \in H$. בה"כ $h_1 h_2 \in G_1$. מכיוון שG_1 חבורה אז $h_1^{-1} \in G_1$ וכן $(h_1^{-1})(h_1 h_2) \in G_1$. כלומר, $h_2 \in G_1$, בסתירה להנחה.

ב. נסתכל על $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, ובתוכו על תתי החבורות:

$G_1 = \{0\} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$G_2 = \mathbb{Z}_2 \times \{0\} \times \mathbb{Z}_2$

$G_3 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \{0\}$

כעת נקח את $H = \{(0,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$

קל לראות ש H אכן תת חבורה, וכן $H \subseteq G_1 \cup G_2 \cup G_3$ אבל לכל $i \in \{1,2,3\}$ $H \nsubseteq G_i$.

תרגיל 5:

א. מצאו תת חבורה ציקלית מסדר 8 ותת חבורה לא ציקלית מסדר 8 של U_{32}.

ב. מצאו בתוך $(\mathbb{Q},+)$ שרשרת אינסופית עולה של תת חבורות ציקליות. (רמז: הראשונה נוצרת ע"י 1).

פתרון:

א. נשים לב ש3 הוא איבר מסדר 8 בU_{32} ולכן יוצר תת חבורה ציקלית מסדר 8.

תת חבורה לא ציקלית: בדקו ש $\{1,7,9,15,17,23,25,31\}$ היא תת חבורה של U_{32} ואינה ציקלית כי אין בה אף איבר מסדר 8.

ב. $\langle 1\rangle \leq \langle \frac{1}{2}\rangle \leq \langle \frac{1}{4}\rangle \leq \langle \frac{1}{8}\rangle \leq \ldots$

תרגיל 6:

תהי G חבורה. נסמן $m_2(G)=|\{x\in G : x^2=1\}|$.

א. הראו שבכל חבורה סופית מתקיים: $m_2(G)\equiv |G| \mod 2$.

ב. הראו שבכל חבורה עם מספר זוגי של איברים קיים איבר מסדר 2.

הדרכה לסעיף א': הסתכלו על יחס השקילות הבא על G: $x\equiv y \Longleftrightarrow x=y \vee xy=1$. מה הגודל של כל מחלקת שקילות?

פתרון:

א. קל לראות שזה אכן יחס שקילות. כל איבר שקול לעצמו ולהופכי שלו, ולכן הגודל של מחלקת השקילות של x הוא 1 אם x שווה להופכי של עצמו, כלומר, $x^2=1$, ו2 אחרת.

G שווה לאיחוד הזר של מחלקות השקילות שלו, ולכן $|G|=\sum|[x]|$ סכום הגדלים של מחלקות השקילות הזרות.

$|G|=2a+b$ כאשר $a=$ מס' מחלקות השקילות בגודל 2, ו $b=$ מס' מחלקות השקילות בגודל 1.

אם נעשה $\mod 2$ נקבל $|G|=b \mod 2$. אבל, מס' מחלקות השקילות בגודל 1 הוא בדיוק מס' האיברים ההופכיים לעצמם, כלומר, $m_2(G)$.

ב. אם $|G|$ זוגי, אז מס' האיברים ההופכיים לעצמם הוא זוגי. מכיוון שיש איבר כזה, 1 (איבר היחידה) חייב להיות לפחות עוד אחד ע"מ שהמספר יהיה זוגי. אז קיים איבר הופכי לעצמו שהוא לא היחידה, ואיבר הופכי לעצמו שאינו היחידה הוא בהכרח מסדר 2.