ואנחנו מחפשים $\delta I=0$.

$$\delta I = -E\delta t$$

$$\delta I = \delta I_0 - E\delta(t-t_0) = \delta I_0 - E\delta t$$

$$I_0 = \int_{t_0}^{t} \sum_i p_i\, dq_i$$

$$-E\delta t = \delta I_0 - E\delta t$$

$$\delta I_0 = 0$$

$$\delta\left[\int_{t_0}^{t} \sum_i p_i\, dq_i\right] = 0$$

עקרון פעולה מינימלית מצומצם   עקרון מפרטיוו

הרצאה 22:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i\, dq_i - H dt$$

$$\delta I = 0 \iff$$ משוואות המילטון

טרנספורמציות קנוניות:

משתנים ישנים $\left| q_1, \dots, q_n \right| p_1, \dots, p_n \Big|$

$$\downarrow \quad \times \quad \downarrow$$

משתנים חדשים $\left| Q_1, \dots, Q_n \right| P_1, \dots, P_n \Big|$

כלומר:

$$Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n, t)$$

$$P_i = P_i(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t)$$

$$H \to H'(Q_1, \dots Q_n; P_1, \dots P_n; t)$$

ואני אדרוש שמשוואות המילטון עדיין יתקיימו:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \; ; \; \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$$

שינוי הקואורדינטות החדשות שתחתם זה מתקיים נקרא טרנספ' קנונית.

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i\, dq_i - H dt \qquad \delta I = 0$$

$$I' = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i P_i\, dQ_i - H' dt$$

$$\delta I' = 0$$

$$\sum_i p_i\, dq_i - H dt = \sum_i P_i\, dQ_i - H' dt + dF$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_i P_i\, dQ_i - H'\,dt + dF\right) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i P_i\, dQ_i - H\,dt + \int_{t_1}^{t_2} dF$$

$$= I' + F(t_2) - F(t_1)$$

$$\delta\left(I' + F(t_2) - F(t_1)\right) = \delta I'$$

$$dF = \sum_i p_i\, dq_i - \sum_i P_i\, dQ_i - (H - H')\,dt$$

פונקציה יוצרת F

$$F(q_i, Q_i, t) \Rightarrow df = \frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F}{\partial t} dt$$

ולכן:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial q_i} = p_i \;;\; \frac{\partial F}{\partial Q_i} = P_i \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = H' - H}$$

$$F(q_i, Q_i, t) := F^{(q,Q)}$$

$$d\left(F^{(q,Q)} + \sum_i P_i Q_i\right) = dF^{q,Q} + \sum_i d(P_i Q_i)$$

$$= \sum_i p_i\, dq_i - \sum_i \cancel{P_i\, dQ_i} - (H - H')\,dt + \sum_i \cancel{P_i\, dQ_i} + \sum_i Q_i\, dP_i$$

הגדרה:

$$F^{q,P} := F^{q,Q} + \sum_i P_i Q_i$$

$$dF^{q,P} = \sum_i p_i\, dq_i + \sum_i Q_i\, dP_i - (H - H')\,dt$$

ולכן

$$\frac{\partial F^{q,P}}{\partial q_i} = p_i \;;\; \frac{\partial F^{q,P}}{\partial P_i} = Q_i$$

$$F^{q,Q} + \sum_i P_i Q_i - \sum p_i q_i = F^{p,P}$$

באופן דומה למעלה

$$q_i = -\frac{\partial F^{p,P}}{\partial p_i} \;;\; Q_i = \frac{\partial F^{p,P}}{\partial P_i}$$

ניתן להראות שקואורדינטות שהגיעו מטרנס' קנונית מקיימים:

תנאים לטרנס' קנוני:

$$\{Q_i, Q_k\}_{p,q} = 0 \;;\; \{P_i, P_k\}_{p,q} = 0$$

$$\{P_i, Q_k\}_{p,q} = \delta_{ik}$$

וגם בכיוון ההפוך: [אם ורק אם].

$$\{Q_i, Q_k\}_{p,q} = \sum_j \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\frac{\partial Q_k}{\partial q_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\frac{\partial Q_k}{\partial p_j}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = H' - H \qquad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

הערה: אם מצאנו F לא תלויה מפורשות בזמן

אזי $H' = H$.

$$\{Q_i, Q_k\}_{p,q} = \sum_j \overset{1}{\frac{\partial Q_i}{\partial p_j}} \overset{2}{\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}} - \overset{3}{\frac{\partial Q_i}{\partial q_j}} \overset{4}{\frac{\partial Q_k}{\partial p_j}}$$

2) $\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial F^{qP}}{\partial P_k} = \frac{\partial}{\partial P_k} \frac{\partial}{\partial q_i} F^{qP}$

1) $\frac{\partial Q_i}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j} \frac{\partial F^{pP}}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \frac{\partial}{\partial p_j} F^{pP}$

3) $\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial F^{qP}}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \cdot \frac{\partial}{\partial q_j} F^{qP}$

4) $\frac{\partial Q_k}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial P_k} F^{pP} = \frac{\partial}{\partial P_k} \frac{\partial}{\partial p_j} F^{pP}$

$$\{q_i, q_k\}_{P,Q} = 0$$

הערה:

$$\{f, g\}_{p,q} = \{f, g\}_{P,Q}$$

כל פתרון הוא סוג של טרנס׳ קנונית

$P(t_0), q(t_0)$

$\downarrow$

$P(t_0+\tau), q(t_0+\tau)$

איך נמצא את זה?

אפשר בעזרת הכלים שלמדנו או בעזרת שינוי קואורדינטות P, Q ובעזרת פונקציה יוצרת. ונעזרת

$$dI = \sum_i P_i(t_2)\,dq_i(t_2) - \sum_i P_i(t_1)\,dq_i(t_1) - H(t_2)\,dt_2 + H(t_1)\,dt_1$$

ועכשיו נציב: $t_1 = t_0 \qquad t_2 = t_0 + \tau$

$$dI = \sum_i P_i(t_0+\tau_0)\,dq_i(t_0+\tau) - \sum_i P_i(t_0)\,dq_i(t_0) - H(t_0+\tau)\,d(t_0+\tau) + H(t_0)\,dt_0.$$

$$dI = \sum_i P\,dQ - \sum p_i\,dq_i - (H'-H)\,dt_0$$

$-I \leftarrow$ פונקציה יוצרת.

דוגמה: אוסילטור הרמוני:

$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$

$U = \frac{1}{2} k q^2$

$$H = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} k q^2$$

במקרה שזה פשוט אפשר "לנחש" פתרון ישר מההמילטוניאן [illegible] [illegible] את כל מה שעשינו אתמול.

$$p = m\dot{q}$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$

$$F = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\,q^2\cot Q$$

נתון פונקציה יוצרת

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q\cot Q$$

$$P = \frac{\partial F}{\partial Q} = -\frac{m\omega q^2}{2}\left(-\frac{1}{\sin^2 Q}\right)$$

$$p = m\omega q\cot Q \qquad P = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q}$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$$

צריך למצוא:

$$1)\ p(P,Q) \qquad 2)\ q(P,Q)$$

נשים לב ש:

$$H' = H$$

בגלל ש $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$,

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega P}\cos Q$$

$$H' = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{\left(\sqrt{2m\omega P}\cos Q\right)^2}{2m} + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q\right)^2$$

הערה: במידה ! $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ אז: $H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$

ובסוף נקבל:

$$H = \omega P$$

ונקבל ממשוואות המילטון

$$0 = \frac{\partial H}{\partial Q} = -\dot{P}$$

$$P = \text{const}$$

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial P} = \dot{Q} \Rightarrow Q = \omega t + \varphi_0$$