

שיעורי בית 6

22 בדצמבר 2015

1. נתון $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ הומומורפיזם בין חבורות. אברי היחידה הם בהתאמה: e_1, e_2 . הוכח:

(א) $\phi(e_1) = e_2$ [רמז: חשב $\phi(e_1 e_1)$]
פתרון: מצד אחד $\phi(e_1 e_1) = \phi(e_1)$ ומצד שני

$$\phi(e_1 e_1) = \phi(e_1) \phi(e_1)$$

כיוון ש $\phi(e_2) \in G_2$ יש לו הופכי. לכן אם נכפיל את השיוון

$$\phi(e_1) \phi(e_1) = \phi(e_1)$$

בהופכי זה נקבל

$$\phi(e_1) = e_2$$

(ב) $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$ לכל $g \in G_1$.
פתרון: נחשב

$$e_2 = \phi(e_1) = \phi(g g^{-1}) = \phi(g) \phi(g^{-1})$$

ולכן $\phi(g), \phi(g^{-1})$ הופכיים זה לזה.

(ג) שהגרעין המוגדר $\ker(\phi) = \{x \in G_1 \mid \phi(x) = e_2\}$ הוא תת-חבורה של G_1 .
פתרון: בסעיף קודם ראינו כי $e_1 \in \ker(\phi)$. נראה סגירות. $g, h \in \ker(\phi)$.
אזי

$$\phi(gh^{-1}) = \phi(g) \phi(h^{-1}) = \phi(g) \phi(h)^{-1} = e_1 e_1^{-1} = e_1$$

ולכן $gh^{-1} \in \ker(\phi)$

(ד) שהתמונה $Im(\phi) = \{\phi(x) \mid x \in G_1\}$ היא תת-חבורה של G_2 .
פתרון: $e_2 = \phi(e_1) \in Im(\phi)$. נראה סגירות. יהיו $\phi(g), \phi(h) \in Im(\phi)$ כאשר $g, h \in G_1$ אזי

$$\phi(g) \phi(h)^{-1} = \phi(g) \phi(h^{-1}) = \phi(gh^{-1}) \in Im(\phi)$$

כי $gh^{-1} \in G_1$

2. הגדרה: ההומומורפיזם $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ המוגדר $\phi(g) = e_2$ לכל $g \in G_1$ נקרא ההומומורפיזם הטריוואלי.

(א) מצא המומומורפיזם לא טריוואלי מהחבורה החיבורית \mathbb{Z}_3 לחבורת התמורות S_3
פתרון : כיוון ש $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_3$ ציקלית ומתקיים $3 \cdot 1 = 0$ אזי מספיק להגדיר הומומורפיזם ע"י קביעה לאן שולחים את 1. נניח $1 \mapsto \sigma$ אזי צריכה לקיים $\sigma^3 = id$ לכן הומומורפיזם אפשרי אחד הוא

$$\phi(1) = (1, 2, 3)$$

ואז,

$$\phi(2) = \phi(1 + 1) = \phi(1)\phi(1) = (1, 2, 3)^2 = (1, 3, 2)$$

וגם

$$\phi(0) = id$$

(ב) הוכח שההומומורפיזם הטריאלי הוא ההומומורפיזם היחיד מ S_3 ל \mathbb{Z}_3
פתרון : הוכחה: יהא הומו' ϕ אזי עבור $\sigma_1 = (1, 2), \sigma_2 = (2, 3)$ מתקיים:

$$0 = \phi(id) = \phi(\sigma_i^2) = 2\phi(\sigma_i)$$

אזי האיבר היחידה $a \in \mathbb{Z}_3$ המקיים $0 = 2a$ הוא $a = 0$ ולכן $\phi(\sigma_i) = 0$ ולכן

$$\phi((1, 2, 3)) = \phi(\sigma_1\sigma_2) = \phi(\sigma_1) + \phi(\sigma_2) = 0$$

כיוון ש $(1, 2, 3)$ ו $(1, 2)$ יוצרים של S_3 והם נשלחים לאפס אזי כל איבר ב S_3 ישלח ל-0 ולכן זהו ההומו' הטריאלי.

3. תהא G חבורה. נגדיר $Aut(G)$ להיות קבוצת כל ההומומורפיזם $\phi : G \rightarrow G$ ההפיכים (כלומר חח"ע ועל)

(א) הוכח כי $Aut(G)$ חבורה ביחס לפעולת הרכבת פונקציות.
פתרון : הוכחה:

i. יהיו $\phi_1, \phi_2 \in Aut(G)$ אזי לכל $g, h \in G$ מתקיים כי

$$(\phi_1 \circ \phi_2)(gh) = \phi_1(\phi_2(gh)) = \phi_1(\phi_2(g)\phi_2(h)) = \phi_1(\phi_2(g))\phi_1(\phi_2(h)) = (\phi_1 \circ \phi_2)(g)(\phi_1 \circ \phi_2)(h)$$

ולכן

$$\phi_1 \circ \phi_2$$

הומו' ולכן יש סגירות.

ii. קיבוציות יש בכל הרכבת פונקציות

iii. איבר היחידה הוא id שגם הוא הומו'

iv. איבר הופכי : יהי $\phi \in \text{Aut}(G)$ אזי נראה כי הפונקציה ההופכית ϕ^{-1} היא גם הומ' הוכחה

$$(\phi^{-1})(gh) = (\phi^{-1})(g) (\phi^{-1})(h)$$

אמ"מ (ע"י הרכבה של ϕ משני הצדדים)

$$gh = \phi [(\phi^{-1})(g) (\phi^{-1})(h)]$$

שאכן מתקיים כי

$$\phi [(\phi^{-1})(g) (\phi^{-1})(h)] = \phi [(\phi^{-1})(g)] \phi [(\phi^{-1})(h)] = gh$$

(ב) נגדיר הומומורפיזם של חבורות

$$\Phi : G \rightarrow \text{Aut}(G)$$

ע"י $\Phi(x) = I_x$ כאשר I_x מוגדר להיות פונקציה ההצמדה. כלומר $I_x(g) = xgx^{-1}$.

הוכיחו כי Φ הומומורפיזם (אין צורך להוכיח כי $I_x \in \text{Aut}(G)$) ומצאו $\ker(\Phi)$ הוכחה:

i. יהיו $x, y \in G$ אזי צריך להוכיח כי

$$\Phi(xy) = \Phi(x) \circ \Phi(y)$$

כלומר שמתקיים כי הפונקציות

$$I_{xy} = I_x \circ I_y$$

שוות. יהא $g \in G$ צריך להוכיח כי

$$I_{xy}(g) = (I_x \circ I_y)(g)$$

ואכן

ii. נמצא את הגרעין

$$\text{Ker}(\Phi) = \{x \in G : I_x = id\} = \{x \in G : \forall g \ xgx^{-1} = g\} = \{x \in G : \forall g \ xg = gx\} = Z(G)$$

כלומר זה המרכז ($Center$) של החבורה.

4. כל החבורות בתרגיל זה מוגדרות עם פעולת כפל (וחבורת התמורות עם הרכבה).

(א) נביט בהעתקה $\phi : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \{-1, 1\}$ המוגדרת על ידי $\phi(x) = \frac{x}{|x|}$

(לדוגמה: $\phi(3) = 1$ $\phi(-3) = -1$). הוכח ש ϕ הומומורפיזם ומצא את הגרעין

פתרון : הוכחה:

i. יהיו $x, y \in G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ אזי צריך להוכיח כי

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

ואכן

$$\phi(xy) = \frac{xy}{|xy|} = \frac{xy}{|x||y|} = \frac{x}{|x|} \frac{y}{|y|} = \phi(x)\phi(y)$$

ii. נמצא את הגרעין

$$\text{Ker}(\phi) = \{x \in G : \text{sign}(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

(ב) : $\phi : (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$: המוגדרות על ידי $\phi(a + ib) = a^2 + b^2$ (לדוגמה: $\phi(1 + 2i) = 5$), הוכח שהיא הומומורפיזם ומצא את הגרעין. איזה צורה גיאומטרית יש לגרעין?

פתרון : נשים לב ש $\phi(z) = |z|^2$ כאשר $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. נמשיך להוכיח:

i. יהיו $z_1, z_2 \in G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ אזי צריך להוכיח כי

$$\phi(z_1 z_2) = \phi(z_1)\phi(z_2)$$

ואכן

$$\phi(z_1 z_2) = |z_1 z_2| = |z_1||z_2| = \phi(z_1)\phi(z_2)$$

ii. נמצא את הגרעין

$$\text{Ker}(\phi) = \{z \in G : |z| = 1\} = \{e^{i\theta} | \theta \in \mathbb{R}\}$$

כלומר מעגל היחידה.

(ג) ההומומורפיזם $\phi : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ המוגדרת על ידי $\phi(\sigma) = \text{sign}(\sigma)$. מצא את הגרעין של ϕ

פתרון : נמצא את הגרעין

$$\text{Ker}(\phi) = \{\sigma \in G : \text{sign}(\sigma) = 1\} = A_n$$