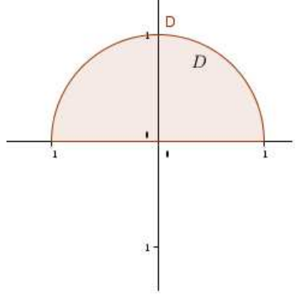
# אינפי 3 תרגול 10

15 בינואר 2014

## קיצון תחת אילוצים - כופלי לגרנז', נקודות קיצון מוחלטות בתחום קומפקטי (סגור וחסום)

### קיצוץ תחת אילוץ בלי כופלי לגרנז'

1. מצאו את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה $z = f(x,y) = x^2+y^2+2x-2y$ בתוך חצי העיגול העליון הסגור (בציור כולל הקטע מציר ה$x$):



**תשובה:**

זו פונקציה רציפה (פולינום), בתחום קומפקטי (חצי עיגול עליון חסום וסגור) לכן יש לה מינ'/מקס' מוחלטים ב-$D$. נחפש נקודות חשודות (קריטיות):

בתוך D (לא על השפה):

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 & \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x=-1 \\ f'_y(x,y)=0 & \Rightarrow 2y-2=0 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

קיבלנו $(-1,1)$נקודה מחוץ לתחום.

נותר לבדוק על השפה:

שני חלקי השפה:

(א) על ציר ה$x$:

$-1 \le x \le 1, y=0$ נציב ונקבל:

$$f(x,0)=g(x)=x^2+2x, \quad -1 \le x \le 1$$

חשודות (קיצוניות):

$$\begin{aligned} x &= -1 \Rightarrow z = -1 \\ y &= 0 \Rightarrow (-1,0) \overset{\text{z val.}}{\to} -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 \Rightarrow z = 3 \\ y &= 0 \Rightarrow (1,0) \overset{\text{z. val}}{\to} 3 \end{aligned}$$

עבור $-1 < x < 1, y = 0$

$$g'(x) = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

ששוב לא בפנים. על ציר ה$x$ ונותר לבדוק את הקשת.

(ב) על קשת חצי מעגל עליון $\left\{x^2 + y^2 = 1, y > 0\right\}$(הפינות נבדקו כבר) .

$$\Rightarrow y^2 = 1 - x^2, y > 0 \Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}, -1 < x < 1$$

נציב לתוך $z = f(x, y)$:

$$\begin{aligned} f(x, \sqrt{1 - x^2}) &= h(x) = x^2 + (1 - x^2) + 2x - 2\sqrt{1 - x^2} \\ \Rightarrow h'(x) &= 2 - 2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = 2\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = 0 \\ \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} &= 1 \\ \frac{x^2}{1 - x^2} &= 1 \Rightarrow x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1/2 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

נקודות חשודות .

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow z = h(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + \sqrt{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &\overset{\text{z.val.}}{\to} 1 \\ x &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow z = h(\frac{-\sqrt{2}}{2}) = 1 - \sqrt{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \overset{\text{z val.}}{\to} 1 - \sqrt{2} < -1}$$

<u>לסיכום:</u> הערך הגדול ביותר של $z = f(x, y)$ בתחום $D$ הוא 3 והוא מתקבל בנקודה $(1, 0)$ והערך הקטן ביותר של הפו' הוא $1 - 2\sqrt{2}$ המתקבל בנקודה $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

## קיצון תחת אילוצים וכופלי לגרנז'

עבור פו' ב־2 משתנים $z=f(x,y)$, המוגדרת בתחום $D$ ונניח העקום $C$ (אילוץ) מוגדר ע"י המשוואה: $g(x,y)=0$ נניח כי $f(x,y),g(x,y)$ הן $C^1$ב־$D$. נגדיר פונקציות עזר: $\Phi(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$.

**משפט:**

אם לפונקציה $z=f(x,y)$ יש נקודת מקסימום או מינ' עם אילוץ $g(x,y)$, אז או שמתקיים המערכת:

$$\vec{\nabla}\Phi=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}\Phi'_x=0\\ \Phi'_y=0\\ \Phi'_\lambda=0\Rightarrow g(x,y)=0\end{cases}$$

או $\vec{\nabla}g=\vec{0}$ (אלה נקודות חשודות לקיצון תחת אילוץ).

**דוגמה:**

למצוא את המרחק הקצר ביותר מראשית הצירים להיפרבולה $7x^2+8xy+y^2=45$.

**תשובה:**

ההיפרבולה היא האילוץ:

$$g(x,y)=7x^2+8xy+y^2-45=0$$

רוצים למצוא מינימום למרחק בריבוע מהראשית (ברקע שהמרחק בריבוע הוא מינימאלי גם המרחק עצמו הוא מנימאלי כי $\sqrt{t}$ $t\geq 0,$ פונקציה עולה). כלומר ל־$f(x,y)=x^2+y^2$. בסה"כ מוצאים מינימום ל־$f(x,y)$ תחת האילוץ $g(x,y)=0$. נגדיר פונקצית עזר:

$$\Phi(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\left(7x^2+8xy+y^2-45\right)$$

נמצא תשובות: בהתחלה מתוך $\vec{\nabla}\Phi=\vec{0}$.

$$\begin{cases}\Phi'_x= & 2x+14\lambda x+\lambda y=0\\ \Phi'_y= & 2y+8\lambda x+2\lambda y=0\end{cases}\Rightarrow\qquad\begin{cases}(1+7\lambda)x+4\lambda y & =0\\ 4\lambda x+(1+\lambda)y & =0\end{cases}$$

רוצים פתרון לא טריוויאלי. כלומר לא $(0,0)$ (כי הוא לא על ההיפרבולה) ולכן נדרוש

$$\begin{vmatrix}1+7\lambda & 4\lambda\\ 4\lambda & 1+\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda=1,-\frac{1}{9}$$

עבור $\lambda=1$: נציב באחת המשוואות מעלה ונקבל $y=-2x$ ואם נציב בהיפרבולה $-4x^2=45$⇐לא יתכן.
עבור $\lambda=2$ ע"י הצבה בהיפרבולה מקבלים

$$\begin{aligned}y &= \pm 1\Leftarrow 45y^2=45\\ \Rightarrow x &= \pm 2\Rightarrow(2,1)\parallel(-2,-1)\end{aligned}$$

בשתיהן המרחב בריבוע הוא 5. נותר לבדוק את התנאי:

$$\vec{\nabla} g=\vec{0}:\begin{cases} g'_x=0: 14x+8y=0 \\ g'_y=0: 8x+2y=0\end{cases} \Rightarrow (0,0)$$

שלא על ההיפרבולה. קיבלנו 2 נקודות חשודות $(-2,-1),(2,1)$ עם מרחק $\sqrt{5}$ מהראשית על ההיפרבולה. זהו מרחק מינימאלי כי לא קיים עבורו מקסימום הרי ענפי ההיפרבולה "נפתחים עד $\infty$":

דוגמה נוספת:

למצוא נקודות קיצון של $u(x,y)=xy$ תחת האילוץ $g(x,y)=x+y-1=0$ בעזרת כופלי לגראנז'.

תשובה:

נגבנה פונ' לגרנז':

$$\begin{aligned} \Phi(x,y,\lambda) &= u(x,y)+\lambda g(x,y) \\ \Rightarrow \Phi(x,y,\lambda) &= xy+\lambda(x+y-1) \\ \Rightarrow \vec{\Phi} &= \vec{0}:\begin{cases} -y+\lambda=0 \\ x+\lambda=0 \\ x+y=1\end{cases} \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow (x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

האם זו נקודת מק' או מינ' גלובלי?

ניקח נקודה אחרת, המקיימת את האילוץ, למשל $(0,1)$ ונקבל $u(0,1)=0<u(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=1$ ולכן זו נקודת מקסימום וערכה $\frac{1}{4}$.

## מינ'/מקס עם שני אילוצים (3 משתנים וכד')

נתונה פונקציה $w=f(x,y,z)$ רציפה בתחום מרחבי $D$ ונניח כי העקום $C$ מתקבל מחיתוך של 2 משטחים הנמצאים ב־$D$:

$$\begin{cases} g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0\end{cases}$$

רוצים למצוא $\min\big/\max$ של $w$ על העקום $C$:

$$\Phi(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g_1(x,y,z)+\mu g(x,y,z)$$

אז הנקודות החשודות למינ' או מקס תחת האילוצים יהיו $\vec{\nabla}\Phi=\vec{0}$ או $\nabla\vec{g_1}\times\vec{\nabla}g_2=\vec{0}$ היכן

ש: $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{u_i} & u_j & u_k \\ \vec{v_i} & v_j & v_k\end{vmatrix}$ וזו מכפלה וקטורית ($i,\vec{j},k$ וקטורי יחידה בכיוון הצירים).

**דוגמה:**

על העקום המתקבל מחיתוך של גליל $x^2+y^2=1$ עם מישור $z=x+y$ למצוא נקודה (או נקודות) הקרובה ביותר והרחוקות ביותר מהראשית $(0,0,0)$.

**תשובה:**

פונקצית המרחק בריבוע: $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ ונבנה פונקצית עזר

$$\begin{cases} f(x,y,z) & = x^2+y^2+z^2 \\ g_1(x,y,z) & = x^2+y^2-1=0 \\ g_2(x,y,z) & = x+y-z=0 \end{cases}$$

נבנה פונקצית לגרנז'

$$\Phi(x,y,z,\mu,\lambda) = x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-1)+\mu(x+y-z)$$

$$\vec{\nabla}\Phi=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x+2\lambda x+\mu=0 \\ 2y+2\lambda y+\mu=0 \\ 2z-\mu=0 \\ z=x+y & \Rightarrow \mu=2x+2y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

נציב ב־2 המשוואות הראשונות:

$$\begin{cases} (2+\lambda)x+y=0 \\ x+(2+\lambda)y=0 \end{cases}$$

רוצים פתרון לא טריוויאלי$\Leftarrow$$(2+\lambda)^2=1 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-1,-3$. עבור $\lambda=-1$:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$$

$\Leftarrow$המרחק בריבוע הוא 1. עבור $\lambda=-3$:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)$$

ואזי המרחק בריבוע 3 . כעת:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}g_1\times\vec{\nabla}g_2 &= \vec{0} \\ \vec{\nabla}g_1 &= (2x,2y,0) \\ \vec{\nabla}g_2 &= (1,1,-1) \end{aligned}$$

ולכן:

$$\vec{\nabla}g_1\times\vec{\nabla}g_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(-2y,2x,2x-2y)=(0,0,0)\Rightarrow x=y=0$$

וזה לא טוב. בסה"כ $(2\vec{y}_i-2\vec{x}_j)-(2x-2y)\cdot\vec{k}$.