

פונקציות מרוכבות למהנדסים

תרגיל כיתה 4: נגזרות. משוואות קושי-רימן

1. הראו כי $f(z) = \bar{z}$ אינה גזירה באף נקודה.

נרשום

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{z + \Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.$$

קעת נרשום $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. נבחר תחילה $\Delta z = \Delta x$ וניקח את הגבול

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

נבחר גם $\Delta z = i\Delta y$ וניקח את הגבול

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1,$$

וסיימנו.

2. הראו כי $f(z) = z/\bar{z}$ אינה גזירה באף נקודה.

נרשום

$$f = \frac{x + iy}{x - iy} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i \frac{2xy}{x^2 + y^2} = u(x, y) + iv(x, y).$$

נחשב את הנגזרות החלקיות u_x, u_y, v_x, v_y :

$$u_x = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad u_y = -\frac{4yx^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$v_x = \frac{2y^3 - 2yx^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v_y = -\frac{2x^3 - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\begin{cases} 2x^3 - 6xy^2 = 0 \\ 2y^3 - 6yx^2 = 0 \end{cases} \quad \text{ונקבל כי למשוואות קושי רימן}$$

פתרון יחיד $(x, y) = (0, 0)$ אולם $f(0)$ לא מוגדרת.