אנליזה מתקדמת למורים, פתרון תרגיל 1

20 בנובמבר 2019

1. רשמו את המספרים הבאים בצורה $z = a + bi$, מצאו את $Im(z), Re(z), \overline{z}, |z|$, ומקמו את z על הצירים. הערה: לא להיבהל משברים ושורשים....

(א) $(3-5i)^{-1}$

(ב) $(\sqrt{5}i)^{-1}$

(ג) 4^{-1}

(ד) $\frac{3-3i}{4+3i}$

(ה) $\frac{-5-i}{4-5i}$

<u>פתרון:</u>

א. נקבל מהנוסחא $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ אצלנו:

$$z = (3-5i)^{-1} = \frac{\overline{3-5i}}{|3-5i|^2} = \frac{3+5i}{(\sqrt{3^2+(-5)^2})^2} = \frac{3+5i}{(\sqrt{34})^2} = \frac{3}{34} + \frac{5}{34}i$$

ולכן: $Im(z) = \frac{5}{34}, Re(z) = \frac{3}{34}, \overline{z} = \frac{3}{34} - \frac{5}{34}i, |z| = \frac{1}{|z^{-1}|} = \frac{1}{\sqrt{34}}$.

ב. כנל:

$$z = (\sqrt{5}i)^{-1} = \frac{\overline{\sqrt{5}i}}{|\sqrt{5}i|^2} = \frac{-\sqrt{5}i}{(\sqrt{\sqrt{5}^2})^2} = \frac{-\sqrt{5}i}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5}i$$

ולכן : $Im(z) = -\frac{\sqrt{5}}{5}, Re(z) = 0, \overline{z} = \frac{\sqrt{5}}{5}, |z| = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

ג. זהו המספר הממשי $\frac{1}{4}$, וזו גם ההצגה שלו כמרוכב. נקבל: $Im(z) = 0, Re(z) = \frac{1}{4}, \overline{z} = \frac{1}{4}, |z| = \frac{1}{4}$.

ד. נכפיל בצמוד למכנה:

$$z = \frac{3-3i}{4+3i} = \frac{3-3i}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{12-9i-12i-9}{16+9} = \frac{3-21i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{21}{25}i$$

ולכן: $Im(z) = \frac{21}{25}, Re(z) = \frac{3}{25}, \overline{z} = \frac{3}{25} + \frac{21}{25}i, |z| = \sqrt{(\frac{3}{25})^2 + (-\frac{21}{25})^2} = \sqrt{\frac{9+441}{625}} = \sqrt{\frac{450}{625}}$.

ה. כנל:

$$z = \frac{-5-i}{4-5i} = \frac{-5-i}{4-5i} \cdot \frac{4+5i}{4+5i} = \frac{-20-25i-4i+5}{41} = \frac{-15-21i}{41} = -\frac{15}{41} - \frac{21}{41}i$$

ולכן: $Im(z)=-\frac{21}{41}, Re(z)=-\frac{15}{41}, \overline{z}=-\frac{15}{41}+\frac{21}{41}, |z|=\sqrt{(-\frac{15}{41})^2+(-\frac{21}{41})^2}=\sqrt{\frac{666}{1681}}$.

2. חשבו את השורשים הבאים:

(א) $\sqrt{i}$

(ב) $\sqrt{7+24i}$

(ג) $\sqrt{-5-12i}$

<u>פתרון:</u>

א. נסמן את השורש ב $z=a+bi$, לכן $(a+bi)^2=a^2+2abi-b^2=i$.
ומכאן להשוואת מקדמים הנותנת לנו שתי משוואות בשני נעלמים:

$$\begin{cases} a^2-b^2=0 \\ 2ab=1 \end{cases}$$

כלומר,

$$\begin{cases} a^2=b^2 \\ ab=\frac{1}{2} \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל $a^2b^2=\frac{1}{4}$ אבל הצבה במשוואה הראשונה תתן לנו $a^4=\frac{1}{4}$ מה שאומר $a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ולכן (משוואה שניה) $b=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. כלומר, $z=\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)$.

ב. כאן נקבל שתי משוואות בשני נעלמים הבאות:

$$\begin{cases} a^2-b^2=7 \\ 2ab=24 \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל $b=\frac{12}{a}$, נציב במשוואה הראשונה ונקבל $a^2-(\frac{12}{a})^2=7 \Rightarrow a^4-7a^2-144=0$. פתרונות המשוואה הדו ריבועית הזו הם: $a^2=16$ או $a^2=-9$ שלא אפשרי. לכן נקבל $a=\pm4$, ובהתאמה $b=\pm3$. בסה"כ: $z=\pm(4+3i)$.

ג. בדומה נקבל:

$$\begin{cases} a^2-b^2=-5 \\ 2ab=-12 \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל $b=\frac{-6}{a}$, נציב במשוואה הראשונה ונקבל $a^2-(\frac{-6}{a})^2=-5 \Rightarrow a^4+5a^2-36=0$. פתרונות המשוואה הדו ריבועית הזו הם: $a^2=4$ או $a^2=-9$ שלא אפשרי. לכן נקבל $a=\pm2$, ובהתאמה, $a=2 \Rightarrow b=-3, a=-2 \Rightarrow b=3$ (מסמנים את זה $b=\mp3$, קודם המינוס ואז הפלוס...). בסה"כ: $z=\pm(2-3i)$.

3. פתרו את המשוואות הבאות:

(א) $z^2+(4+i)z+5+5i$

(ב) $2z^2-(12+i)z+17=0$

<u>פתרון:</u>

א. לפי נוסחת השורשים נקבל:

$$z_{,2}=\frac{-4-i\pm\sqrt{(4+i)^2-4(5+5i)}}{2}=\frac{-4-i\pm\sqrt{16+8i-1-20-20i}}{2}=\frac{-4-i\pm\sqrt{-5-12i}}{2}$$

כעת, לפי שאלה 2 סעיף ג נקבל $\sqrt{-5-12i}=\pm 2-3i$, ולכן:

$$z_{1,2}=\frac{-4-i\pm(2-3i)}{2}\Rightarrow z_1=-1-2i, z_2=-3+i$$

ב. לפי נוסחת השורשים נקבל:

$$z_{1,2}=\frac{12+i\pm\sqrt{(12+i)^2-4\cdot 2\cdot 17}}{4}=\frac{12+i\pm\sqrt{144+24i-1-136}}{4}=\frac{12+i\pm\sqrt{7+24i}}{4}$$

כעת, לפי שאלה 2 סעיף ב נקבל $\sqrt{7+24i}=\pm 4+3i$, ולכן:

$$z_{1,2}=\frac{12+i\pm(4+3i)}{4}\Rightarrow z_1=4+i, z_2=2-\frac{1}{2}i$$

4. מצאו מספר מרוכב z המקיים: $|z|=12, Im(\overline{z})=-9.5$.

<u>פתרון:</u>

מהנתונים נקבל: $b=9.5, \sqrt{a^2+90.25}=12\Rightarrow a^2=144-90.25=53.75\Rightarrow$ $a=\pm\sqrt{53.75}$. בקשו למצוא מספר אחד, לכן ניקח את השורש החיובי ונקבל: $z=\sqrt{53.75}+9.5i$.

5. נניח שאנחנו מסמנים במישור המרוכב את כל המספרים z המקיימים $z+\overline{z}=8$. מה נקבל?

<u>פתרון:</u>

נקבל מהמשוואה ש $2Re(z)=8\Rightarrow Re(z)=4$. כלומר, אם נחזור לסימון הרגיל $z=a+bi$, נקבל ש־$a=4$, ו־b יכול להיות מה שאנחנו רוצים. נקבל את הישר האנכי לציר ה־$Re(z)$ (הלא הוא ציר ה־x) בנקודה $(4,0)$.

6. הוכיחו שלכל שני מספרים מרוכבים שונים $z\neq w$ כך ש־ $|z|=|w|$ מתקיים: המספר $\frac{z+w}{z-w}$ הינו מדומה טהור (כלומר, $Re(\frac{z+w}{z-w})=0$).

<u>פתרון:</u>

נכפיל את המונה והמכנה בצמוד של המכנה:

$$\frac{z+w}{z-w}=\frac{(z+w)(\overline{z-w})}{(z-w)(\overline{z-w})}=\frac{(z+w)(\overline{z}-\overline{w})}{|z-w|^2}=\frac{z\overline{z}-z\overline{w}+w\overline{z}-w\overline{w}}{|z-w|^2}$$

כעת, המכנה כמובן ממשי, ונותר להראות שהמונה מדומה טהור וסיימנו. נשים לב: $|w|^2 = w\overline{w}, |z|^2 = z\overline{z}$ וכיון שנתון $|w| = |z|$ נקבל במונה שהם מבטלים אחד את השני: $z\overline{z} - w\overline{w} = |z|^2 - |w|^2 = 0$. בנוסף נשים לב ש־ $\overline{z\overline{w}} = w\overline{z}$, ולכן, אם נסמן $t = w\overline{z}$ נקבל: $w\overline{z} - z\overline{w} = t - \overline{t} = 2 \cdot Im(t)i$ שזהו מספר מדומה טהור. בסה"כ המונה מדומה טהור והמכנה ממשי, ולכן המספר כולו מדומה טהור.

7. מעבר בין הצגות.

(א) כתבו את המספרים הבאים בצורה קרטזית:

i. $5\text{cis}135°$

ii. $\text{cis}\frac{\pi}{3}$

(ב) כתבו את המספרים הבאים בצורה פולרית $z = r\text{cis}\theta$:

i. $-5i$

ii. $2 - 2i$

iii. 17.5

iv. $-2 + i$

v. $-3 - 4i$

<u>פתרון:</u>

<u>חלק א</u>

א. $z = 5\cos 135 + 5\sin 135 \cdot i = -2.5\sqrt{2} + 2.5\sqrt{2}i$.

ב. $z = \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} \cdot i = 0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

<u>חלק ב</u>

א. זהו מספר מדומה טהור, ולכן הוא נמצא על הציר המדומה (ציר ה־y) בחלקו התחתון. לכן מרחקו מהראשית הוא 5, והזוית עם הכיוון החיובי של הציר הממשי (ציר ה־x) היא $\frac{3\pi}{2} = 270°$. בסה"כ נקבל $z = 5\text{cis}\frac{3\pi}{2}$.

ב. נחשב את הנורמה: $r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. והזוית במחשבון: $\tan\theta = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow \theta - 45$, כיון שהמספר נמצא ברביע הרביעי זה אכן מתאים (ומי שלא אוהב מינוס יכול להוסיף $360°$, ולקבל $\theta = 315° = \frac{7\pi}{4}$). בסה"כ: $z = 2\sqrt{2}\text{cis}\frac{7\pi}{4}$.

ג. זהו מספר ממשי, ולכן נמצא על הצירה הממשי (ציר ה־x). לכן מרחקו מהראשית הוא 17.5, והזוית היא 0. בסה"כ: $z = 17.5\text{cis}0$.

ד. רדיוס: $r = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, והזוית במחשבון: $\tan\theta = \frac{1}{-2} \Rightarrow \theta = -26.57$. זוית זו מתאימה לרביע הרביעי, ואילו המספר שלנו נמצא ברביע השני, לכן נוסיף $-26.57 + 180 = 153.43$. בסה"כ: $z = \sqrt{5}\text{cis}153.43$.

ה. רדיוס: $r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$. והזוית במחשבון: $\tan\theta = \frac{-4}{-3} = 1\frac{1}{3} \Rightarrow \theta = 53.13$. זוית זו מתאימה לרביע הראשון, ואילו המספר שלנו נמצא ברביע השלישי, לכן נוסיף $53.13 + 180 = 233.13$. בסה"כ: $z = 5\text{cis}233.13$.

בהצלחה!