אינפי 4 : פתרון תרגיל 1

1. חשבו את האורכים של העקומות הבאות:

א. הספירלה $\gamma(t)=(t\cos t, t\sin t), t\in[0,\pi]$.

ב. הציקלואידה $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$.

ג. העקומה המתקבלת מחיתוך ספירת היחידה $x^2+y^2+z^2=1$ עם המישור $x+z=1$.

<u>פתרון:</u> א. מנוסחת האורך נקבל

$$L=\int_0^\pi \sqrt{((t\cos t)')^2+((t\sin t)')^2}dt$$

$$=\int_0^\pi \sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2}dt$$

$$=\int_0^\pi \sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t+t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)-2t\sin t\cos t+2t\sin t\cos tdt}$$

$$=\int_0^\pi \sqrt{1+t^2}dt=[t=\sinh\lambda, dt=\cosh\lambda d\lambda]$$

$$=\int_0^{\operatorname{arcsin}\pi}\sqrt{1+\sinh^2\lambda}\cosh\lambda d\lambda=\int_0^{\operatorname{arcsin}\pi}\cosh^2\lambda d\lambda$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arcsin}\pi}(1+\cosh(2\lambda))d\lambda=\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{2}\sinh(2\lambda)\right)\Big|_0^{\operatorname{arcsin}\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsin}\pi+\frac{1}{2}\sinh(2\operatorname{arcsin}\pi)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsin}\pi+\frac{1}{2}\cdot 2\sinh(\operatorname{arcsin}\pi)\cosh(\operatorname{arcsin}\pi)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsin}\pi+\pi\sqrt{\pi^2+1}\right).$$

ב. קל לבדוק שהציקלואידה $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ סימטרית גם ביחס לציר ה־x וגם ביחס לציר ה־y. לכן מספיק לחשב את אורך העקומה ברביע הראשון ולהכפיל ב־4. ברביע הראשון העקומה נתונה כגרף של הפונקציה

$$f(x)=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},x\in[0,1].$$

אם נסמן $x=t^3$ אז ניתן לעשות פרמטריזציה לגרף של f לפי

$$\gamma(t)=\left(t^3,\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right),t\in[0,1].$$

לכן, כיוון ש־

$$\gamma'(t)=\left(3t^2,-3t(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\right),t\in[0,1]$$

מנוסחת האורך נקבל

$$L=4\int_0^1\sqrt{(3t^2)^2+\left(-3t(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2}dt$$

$$=4\int_0^1\sqrt{9t^4+9t^2(1-t^2)}dt=4\int_0^1\sqrt{9t^2}dt=4\int_0^1 3tdt=6.$$

ג. כיוון ש־$z^2=1-x^2-y^2$ ו־$z=1-x$ נקבל ש־

$$1-x^2-y^2=(1-x)^2=1-2x+x^2.$$

לכן

$$2x^2-2x+y^2=0\Rightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{2}.$$

לכן להיטל העקומה שאנו מחפשים על מישור ה־XY יש את הפרמטריזציה

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t,y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,t\in[0,2\pi].$$

מכאן, כיוון ש־$z=1-x$, נקבל שלעקומה שאנו מחפשים יש את הפרמטריזציה

$$\gamma(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t\right),t\in[0,2\pi].$$

אם נגזור את γ נקבל

$$\gamma'(t)=\left(-\frac{1}{2}\sin t,\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\frac{1}{2}\sin t\right)$$

מנוסחת האורך נקבל ש־

$$L(\gamma)=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\sin t\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin t\right)^2}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\cos^2 t+\frac{1}{2}\sin^2 t}dt=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pi.$$

ואכן החיתוך של ספירת היחידה עם המישור בנתון הוא מעגל עם רדיוס $\frac{1}{\sqrt{2}}$ שהיקפו הוא אכן $\sqrt{2}\pi$.

2. א. הוכיחו שאם לעקומה γ יש אורך והיא נתונה במערכת קאורדינטות קוטביות כ־$r=\rho(\theta)$ כאשר $\theta\in[\alpha,\beta]$ אז אורכה נתון לפי

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho(\theta)^2+\rho'(\theta)^2}d\theta$$

ב. בעזרת סעיף א' חשבו את אורך הקרדיואידה

$$r=a(1+\cos\theta),\theta\in[0,2\pi].$$

פתרון: א. מהגדרת הקאורדינטות הקוטביות נובע שבקאורדינטות קרטזיות ל־γ יש את הפרמטריזציה

$$\gamma(\theta)=(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta),\theta\in[\alpha,\beta]$$

לכן מנוסחת האורך נקבל

$$L(\gamma)=\int_\alpha^\beta\sqrt{((\rho(\theta)\cos\theta)')^2+((\rho(\theta)\sin\theta)')^2}d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta)^2+(\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta)^2}d\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho'(\theta)^2\cos^2\theta+\rho'(\theta)^2\sin^2\theta+\rho(\theta)^2\cos^2\theta+\rho(\theta)^2\sin^2\theta+2\rho(\theta)\rho'(\theta)\cos\theta\sin\theta-2\rho(\theta)\rho'(\theta)\cos\theta\sin\theta}d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta.$$

ב. במקרה של הקרדיואידה בנתון מתקיים $\rho(\theta) = a(1+\cos\theta)$ כאשר $\theta \in [0, 2\pi]$. לכן, כיוון ש־$\rho'(\theta) = -a\sin\theta$ מהנוסחא שהוכחנו בסעיף א' נקבל שאורך הקרדיואידה הוא

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a(1+\cos\theta))^2 + (-a\sin\theta)^2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) + a^2\sin^2\theta d\theta}$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1+\cos\theta)} d\theta = \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos\theta} d\theta$$

$$= \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}} d\theta = 2a \int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| d\theta$$

$$2a \left(\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2} d\theta - \int_{\pi}^{2\pi} \cos\frac{\theta}{2} d\theta \right)$$

$$= 2a \left(2\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} - 2\sin\frac{\theta}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = 8a.$$

3. תהי

$$x = \sin\phi\cos\theta, y = \sin\phi\sin\theta, z = \cos\phi \;(*)$$

פרמטריזציה של ספירת היחידה ב־$\mathbb{R}^3$ כאשר $\theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi]$. תהי

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

עקומה הנמצאת על ספירת היחידה הנתונה לפי ההצגה $(*)$ כאשר $\theta = \theta(t)$ ו־$\phi = \phi(t)$ תלויים בפרמטר t. הוכיחו כי

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(\phi'(t))^2 + \sin^2(\phi(t)) \cdot (\theta'(t))^2} dt$$

<u>פתרון</u>: לפי הנתון, העקומה γ נתונה באופן מפורש כ־

$$\gamma_1(t) = \sin(\phi(t))\cos(\theta(t)),$$
$$\gamma_2(t) = \sin(\phi(t))\sin(\theta(t)),$$

$$\gamma_3(t) = \cos(\phi(t)).$$

לכן הנגזרת γ' נתונה לפי

$$\gamma_1'(t) = \cos(\phi(t))\cos(\theta(t))\phi'(t) - \sin(\phi(t))\sin(\theta(t))\theta'(t),$$
$$\gamma_2'(t) = \cos(\phi(t))\sin(\theta(t))\phi'(t) + \sin(\phi(t))\cos(\theta(t))\theta'(t),$$
$$\gamma_3'(t) = -\sin(\phi(t))\phi'(t).$$

מכאן נקבל ש־

$$|\gamma'(t)|^2 = \gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 + \gamma_3'(t)^2$$

$$= (\cos(\phi(t))\cos(\theta(t))\phi'(t) - \sin(\phi(t))\sin(\theta(t))\theta'(t))^2$$

$$+(\cos(\phi(t))\sin(\theta(t))\phi'(t) + \sin(\phi(t))\cos(\theta(t))\theta'(t))^2 + (\sin(\phi(t))\phi'(t))^2$$

$$= \cos^2(\phi(t))\left(\cos^2(\theta(t)) + \sin^2(\theta(t))\right)\phi'(t)^2$$

$$+\sin^2(\phi(t))\left(\cos^2(\theta(t)) + \sin^2(\theta(t))\right)\theta'(t)^2$$

$$-2\cos(\phi(t))\sin(\phi(t))\cos(\theta(t))\sin(\theta(t))\phi'(t)\theta'(t)$$

$$+2\cos(\phi(t))\sin(\phi(t))\cos(\theta(t))\sin(\theta(t))\phi'(t)\theta'(t)$$

$$+\sin^2(\phi(t))\phi'(t)^2$$

$$= \cos^2(\phi(t))\phi'(t)^2 + \sin^2(\phi(t))\theta'(t)^2 + \sin^2(\phi(t))\phi'(t)^2$$

$$= \phi'(t)^2 + \sin^2(\phi(t))\theta'(t)^2.$$

לכן נקבל ש־

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\phi'(t)^2 + \sin^2(\phi(t))\theta'(t)^2}$$

ואם נציב זאת בנוסחת האורך נקבל את הטענה שבשאלה.

4. מצאו פרמטריזציה בעלת מהירות יחידה לעקומה

$$\gamma(t) = (\cos t, t + \sin t), t \in [0, \pi]$$

<u>פתרון</u>: כיוון ש־$\gamma'(t) = (-\sin t, 1+\cos t)$ נקבל שפרמטר האורך s נתון לפי

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\sin^2\tau + (1+\cos\tau)^2 d\tau}$$

$$= \int_0^t \sqrt{\sin^2\tau + \cos^2\tau + 1 + 2\cos\tau}d\tau = \int_0^t \sqrt{2+2\cos\tau}d\tau$$

$$= \sqrt{2}\int_0^t \sqrt{1+\cos\tau}d\tau = \sqrt{2}\int_0^t \sqrt{2\cos^2\frac{\tau}{2}}d\tau$$

$$= 2\int_0^t \cos\frac{\tau}{2}d\tau = 4\sin\frac{\tau}{2}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = 4\sin\frac{t}{2}.$$

לכן

$$t = 2\arcsin\left(\frac{s}{4}\right)$$

כמו כן, כיוון ש־$s = 4\sin\frac{t}{2}$ ו־$t \in [0,\pi]$ נובע ש־$s \in [0,4]$. לכן נקבל עקומה השקולה ל־γ בעלת מהירות יחידה לפי הנוסחא

$$\widetilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$$

$$= \left(\cos\left(2\arcsin\left(\frac{s}{4}\right)\right), 2\arcsin\left(\frac{s}{4}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{s}{4}\right)\right)\right).$$

מהנוסחאות

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x, \sin(2x) = 2\sin x\cos x,$$

נקבל

$$\widetilde{\gamma}(s) = \left(1 - \frac{s^2}{8}, 2\arcsin\left(\frac{s}{4}\right) + \frac{s}{2}\sqrt{1-\frac{s^2}{16}}\right)$$

כאשר $s \in [0,4]$.