

לינארית להנדסה- תרגיל 3

תרגיל 1. מרוכבים

1. הוכח שלכל מספר מרוכב z מתקיים $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

2. חשב את $\left(i + \left(i + (i + 1)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$

3. חשב את $(1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{34})^{71}$

4. הציגו את המספרים הבאים בהצגה קוטבית

(א) $1 + i$

(ב) $-\frac{1}{\sqrt{3}} - i$

תרגיל 2. פתרו את המערכת המשוואות הבאה הבאות

$$\begin{cases} x + 4y + 5z = 6 \\ -x - 2y - 6z = -3 \\ 4x + 10y + 23z = 15 \end{cases}$$

תרגיל 3. עבור אילו ערכי a יש למערכות הבאות פתרון יחיד, אין פתרון או אינסוף פתרונות במקרה כזה הציגו את הפתרון הכללי.

$$\begin{cases} ax + ay - az = a \\ -x + 4y - az = 0 \\ 2x - 8y + 4z = 1 \end{cases} \quad 1.$$

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ ax + (2a - 2)y + (a^2 + a)z = a^2 \\ -6x - 2y - 2ya - za^2 - 5az = -5a - 3 \end{cases} \quad 2.$$

תרגיל 4. נתונה המערכת $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{array}\right)$

1. עבור אילו ערכי b אין למערכת הנ"ל פתרון?

2. ענה על התת סעיפים הבאים עבור ה- b שלא מקיים את הסעיף הקודם (למשל אם בסעיף 1 קבלת שעבור $b \neq 1243$ אין פתרון, אז בסעיף זה אתה צריך לענות על התת סעיפים לאחר שהצבת $b = 1243$).

(א) עבור אלו ערכי a יש למערכת פתרון יחיד.

(ב) עבור אילו ערכי a יש למערכת אינסוף פתרונות, ומצא את הפתרון הכללי במקרה זה.

(ג) עבור אילו ערכי a אין למערכת פתרון.

תרגיל 5. נתונות שתי מערכות משוואות (1) $Ax = b_1$ ו-(2) $Ax = b_2$ הוכח או הפרך. (A אינה חייבת להיות ריבועית!)

1. אם למערכת (1) יש אינסוף פתרונות אז גם למערכת (2) יש אינסוף פתרונות.

2. אם למערכת (1) יש פתרון יחיד אז גם למערכת (2) יש פתרון יחיד.

3. אם למערכת (1) אין פתרון אז גם למערכת (2) אין פתרון.

תרגיל 6.

1. הוכח שלכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ המטריצה $AA^t - A^tA$ היא מטריצה סימטרית.

2. הוכח שלכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ המטריצה $A - A^t$ היא מטריצה אנטי סימטרית.

3. הוכח שלכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ניתן לרשום כסכום מטריצה סימטרית ומטריצה אנטי סימטרית.

תרגיל 7. תהי $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פיבונאצי המוגדרת באמצעות נוסחת הנסיגה

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

כלומר סדרת המספרים $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$ היא תחילת הסדרה. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 8. הוכח הפרך: אם $AB = BA$ או $AB^2 = B^2A$?

תרגיל 9. הוכח הפרך: אם y_1 ו- y_2 פתרונות למערכת $Ax = 0$ אז $y_1 + 4y_2$ הוא גם פתרון לאותה מערכת?

תרגיל 10. הוכח הפרך: אם y_1 ו- y_2 פתרונות למערכת $Ax = b$ ($b \neq 0$) אז $y_1 + 4y_2$ הוא גם פתרון לאותה מערכת?

בהצלחה!!