

תרגיל בית 5 פונקציות מרוכבות – נוסחת קושי לנגזרות, משפט ליוביל**שאלה 1**

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int_{|z|=5} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$$

$$\text{ב. } \int_{|z-1|=1} \frac{\cos \pi z}{(z^2-1)^2} dz$$

שאלה 2תהי $f(z)$ פונקציה שלמה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:א. אם לכל z מתקיים $f(z) = f(iz)$ אז f קבועהב. אם לכל z מתקיים $f(z) = f(3z)$ אז f קבועה**שאלה 3**תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת $|f(z) - f(2z)| \leq 10$. הוכיחו כי f קבועה.**שאלה 4**הוכיחו כי לא קיימת פונקציה שלמה f המקיימת $|f(z)| = e^{|z|} - |z| - \frac{1}{2}$ לכל $z \in \mathbb{C}$.**שאלה 5**נניח ש- $f = u + iv$ היא פונקציה שלמה. הוכיחו ש- f קבועה בכל אחד מהמקרים הבאים:

$$\text{א. } u(z) \geq 0 \quad \text{ב. } u(z) \geq v(z)$$

$$\text{ג. } u(z)v(z) \geq 0$$

כאשר כל אחד מאי השוויונים מתקיים לכל $z \in \mathbb{C}$ **שאלה 5**תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1$$

הוכיחו שבהכרח f היא פונקציה לינארית מהצורה $az + b$ כאשר $a, b \in \mathbb{C}$.
הדרכה: משפט ליוביל ומשפט קושי לנגזרות.

שאלה 6

מצאו את כל הפונקציות השלמות המקיימות את אי השוויון

$$|f(x+iy)| \leq e^x, \forall x, y \in \mathbb{R}$$