

לינארית 1 - תרגיל 9 - תאורטי 3

להגשה בשבוע של ה-24.12.17

תרגיל 1. האם V הוא תת מרחב של \mathbb{R}^3

$$1. V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z^2 \geq x^2 + y^2 \right\}$$

$$2. V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2^{3x+z} = 8^{2x-y} \right\}$$

תרגיל 2. עבור כל אחד מהסעיפים הבאים קבע האם הנפרש שווה לקבוצה שאליו משויים. אם כן, בטא איבר כללי של הקבוצה באמצעות הוקטורים הנתונים. אם לא, מצא איבר שנמצא בקבוצה ולא בנפרש.

$$1. \mathbb{R}^3 \stackrel{?}{=} \text{span} \{ (2 \ 0 \ 4), (0 \ 1 \ 0), (6 \ 5 \ 12) \}$$

$$2. \mathbb{R}_3[x] \stackrel{?}{=} \text{span} \{ 1, x + x^2, 4x^3 + x^2, 2x \}$$

$$3. \mathbb{R}^{2 \times 2} \stackrel{?}{=} \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \right\}$$

תרגיל 3.

הצג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 30 & 24 \\ 22 & 24 \end{pmatrix}$$

כצירוף ליניארי של המטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

תרגיל 4.

יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-3, ותהי

$$U = \{ p(x) \in V \mid p(x) = x \cdot p'(x) \}$$

תת קבוצה של V . ($p'(x)$ היא הנגזרת של $p(x)$)

1. הוכיחו ש- U תת מרחב של V .

2. מצאו בסיס ומימד ל- U .

תרגיל 5.

$$\text{חשבו } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

1. $R(A)$ 2. $C(A)$ 3. $N(A)$ 4. $R(B)$ 5. $C(B)$ 6. $N(B)$ **תרגיל 6.** נתונים הווקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. השלימו את $\{v_1, v_2\}$ כך שיהיה בסיס ל- \mathbb{R}^3 2. מצאו בסיס ל- $Sp\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ והשלימו אותו לבסיס ל- \mathbb{R}^3 .**תרגיל 7.** תהי מטריצה $A \in M_{4 \times 8}(\mathbb{R})$ כך ש- $Rank(A) = 4$ 1. האם שורות A תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?2. האם עמודות A תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?3. למה שווה $dim(N(A))$?

$$\text{תרגיל 8. יהיו } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ו-} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. הוכיחו שאוסף כל הווקטורים ב- \mathbb{R}^4 האורתוגונלים לשני הווקטורים האלו הוא תתי מרחב של \mathbb{R}^4 .

2. מצאו בסיס לתת מרחב הזה.

תרגיל 9. נתונים v, u, w אורתונורמלים חשבו את $\|3v + u - 2w\|^2$ **תרגיל 10.** יהיו $x, y \in V / \{0\}$ נגדיר $u = x - \frac{\langle x, y \rangle y}{\|y\|^2}$ 1. הוכיחו ש- u ניצב ל- y כלומר $\langle u, y \rangle = 0$ 2. הוכיחו ש- $\langle u, u \rangle = \langle u, x \rangle$ 3. הראו ש- $0 \leq \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \leq \langle u, u \rangle$ רמז: נשים לב ש- $0 \leq \langle u, u \rangle$

4. הסיקו את אי שיוויון קושי שורץ.

בהצלחה!!