תרגיל 11

1. יהיו (x_i,τ_i) מרחבים דיסקרטיים. האם $\Pi(X_i,\tau_i)$ דיסקרטי? (רמז: תלוי.)
פתרון:

מקרה ראשון: יש מס, סופי של מרחבים. נניח $X_1,...,X_n$. נוכיח שכל נקודון ב$X_1\times...\times X_n$ פתוח. $\{(x_1,...,x_n)\}=\{x_1\}\times...\times\{x_n\}$ מכפלה של קבוצות פתוחות, ולכן קבוצה פתוחה.

מקרה שני: יש מס' אינסופי של מרחבים, אבל רק במספר סופי מתוכם יש יותר מאיבר אחד. נניח בה"כ שב $X_1,...,X_n$ יש יותר מאיבר אחד. אז $\Pi X_i=X_1\times...\times X_n\times (x_j)_{j\in I\setminus\{1,..,n\}}\cong X_1\times...\times X_n$, דיסקרטי.

מקרה אחרון: יש אינסוף מרחבים, ובאינסוף מתוכם יש יותר מאיבר אחד. נוכיח ששום נקודון לא פתוח. תהי O קבוצה פתוחה לא ריקה במכפלה. היא מכילה קבוצה פתוחה בסיסית. ידוע שכל פתוחה בסיסית היא מהצורה של מכפלה של מס' סופי של קבוצות פתוחות, עם שאר המרחבים. מכיוון שיש אינסוף מרחבים עם יותר מאיבר אחד, בהכרח כשנסתכל על $O_1\times...\times O_n\times\Pi_{j\neq1,...,n}X_j$, יש לפחות j אחד כך שב X_j יש יותר מאיבר אחד. לכן בקבוצה כולה יש יותר מאיבר אחד. כלומר, הקבוצה הפתוחה אינה נקודון.

2. יהי (X,d) מרחב מטרי. הוכיחו כי הפונקציה $d:X\times X\to\mathbb{R}$ רציפה.
הוכחה:

נוכיח רציפות בנקודה. יהיו $(x,y)\in X\times X$, ונניח ש $r=d(x,y)$. נקח סביבה בסיסית של r מהצורה $B(r,\epsilon)=(r-\epsilon,r+\epsilon)$. נסתכל על הסביבה הבאה של (x,y): $O=B(x,\frac{\epsilon}{2})\times B(y,\frac{\epsilon}{2})$. נוכיח ש $d(O)\subseteq B(r,\epsilon)$.

יהיו $(z,w)\in O$. צריך להוכיח ש $|d(z,w)-d(x,y)|<\epsilon$.

מצד אחד, $d(z,w)\leq d(z,x)+d(x,y)+d(y,w)<\frac{\epsilon}{2}+r+\frac{\epsilon}{2}=r+\epsilon$. ולכן $d(z,w)-r<\epsilon$.

מצד שני, $r=d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,w)+d(w,y)\leq\frac{\epsilon}{2}+d(z,w)+\frac{\epsilon}{2}=d(z,w)+\epsilon$ ולכן $-\epsilon<d(z,w)-d(x,y)$.

מש"ל.

3. יהי X מרחב טופולוגי, וI קבוצת אינדקסים. נסמן בX^I את מרחב המכפלה $\Pi_{i\in I}X$ (I עותקים של X). לכל $x\in X$ נסמן בf^x את הוקטור בX^I שכל רכיביו הם x. יהי $Y=\{f^x:x\in X\}$ תת מרחב של X^I. הוכיחו ש $X\cong Y$.
הוכחה:

נסתכל על הפונקציות: $F:Y\to X$, $F(f^x)=x$, ו$G:X\to Y$, $G(x)=f^x$. ברור שהן הופכיות אחת לשניה, נראה ששתיהן רציפות. F היא בעצם צמצום של פונקציית ההטלה מX^I לX, וכידוע פונקציית ההטלה ממרחב המכפלה היא רציפה, וצמצום טווח של פונקציה רציפה נותן פונקציה רציפה.

G היא פונקציית הזהות בכל רכיב, כלומר, היא רציפה רכיב־רכיב, ולכן רציפה כפונקציה לתוך X^I. (תזכורת: פונקציה לתוך טופולוגיית המכפלה רציפה אצ"ם היא רציפה רכיב־רכיב.) צמצום התמונה של פונקציה רציפה נותן פונקציה רציפה.

4. הוכיחו שמכפלה של מרחבים שהם T_1 היא T_1.
הוכחה:

יהיו $\{X_i\}$ אוסף של מרחבים שהם T_1, ונסתכל על ΠX_i. נקח שני איברים שונים במכפלה: (a_i) ו(b_i). המשמעות שהם שונים היא שקיים אינדקס שבו הם שונים, כלומר, קיים $j\in I$ כך ש $a_j\neq b_j$. כזכור, $a_j,b_j\in X_j$, שהוא מרחב T_1, ולכן יש לa_j סביבה O_j כך ש$b_j\notin O_j$. נסתכל על הקבוצה הפתוחה הבאה במכפלה: $O=O_j\times\Pi_{i\neq j}X_i$. קל לראות ש$(a_i)\in O$ ו$(b_i)\notin O$. (ההוכחה שיש סביבה פתוחה של (b_i) שלא מכילה את (a_i) זהה.)

5. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) יהי X מרחב טופולוגי דיסקרטי עם בסיס B. הוכיחו שלכל $x\in X$, $\{x\}\in B$.
הוכחה:

כזכורת אם B בסיס לטופולוגיהת וO קבוצה פתוחה $x\in O$, אז יש $V\in B$ כך ש $x\in V\subseteq O$. נקח $O=\{x\}$. אז חייב להתקיים ש $V=\{x\}$.

(ב) יהי X מרחב טופולוגי עם בסיס B, Y קבוצה, ו$f:X\to Y$ פונקציה על. הוכיחו/הפריכו: $B'=\{O\subseteq Y:f^{-1}(O)\in B\}$ הוא בסיס לטופולוגיית המנה על Y.
הפרכה:

נשתמש בדוגמא שראינו בתרגול. נגדיר $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_3$ ע"י $f(x)=x\mod 3$, כאשר $\mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית. נבחר את הבסיס B המורכב מכל הנקודונים. ראינו בתרגול שטופולוגיית המנה יוצאת הטופולוגיה הדיסקרטית. נראה שB' אינו בסיס. מהסעיף הקודם, אם B' בסיס, הוא צריך להכיל את כל הנקודונים. נראה ש $\{0\}\notin B'$. $f^{-1}\{0\}=3\mathbb{Z}\notin B$.

(ג) יהי $\mathbb{R}_l$ הישר של סורגנפריי, ו$f:\mathbb{R}_l\to\mathbb{Z}$ פונקציית הערך השלם. מהי טופולוגיית המנה של $\mathbb{Z}$ ביחס לf?
פתרון:

הטופולוגיה היא הדיסקרטית. לצורך כך מספיק להראו שכל הנקודונים פתוחים. יהי $x\in\mathbb{Z}$. $f^{-1}\{x\}=[x,x+1)$ פתוח בישר של סורגנפריי.

6. נתבונן ב$\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית, וב$f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ פונקציית הערך השלם. נסמן בτ את טופולוגיית המנה על $\mathbb{Z}$ ביחס לf.

(א) הוכיחו שמתקיים: $A\in\tau\iff(n\in A\leftarrow n-1\in A)$.
הוכחה:

$\Longleftarrow$ תהי $A\in\tau$ ו$n\in A$. אז $n\in f^{-1}(A)$. אכן, $f(n)=[n]=n\in A$. מכיוון ש$f^{-1}(A)$ פתוחה, נקבל שיש $\epsilon<1$ כך ש $(n-\epsilon,n+\epsilon)\subseteq A$. נקח $n-\epsilon<t<n$. אז $t\in f^{-1}(A)$, וכן $f(t)=[t]=n-1$. לכן $n-1\in A$.

$\Longrightarrow$ תהי A שמקיימת את התנאי הנ"ל, ונרצה להוכיח ש$f^{-1}(A)$ פתוח ב$\mathbb{R}$. יהי $x \in f^{-1}(A)$. אם $x \notin \mathbb{Z}$, אז יש $n \in \mathbb{Z}$ כך ש $n-1 < x < n$. $f(x) = [x] = n-1$. כמו כן, $f(n-1,n) = n-1$. לכן $x \in (n-1,n) \subseteq f^{-1}(A)$. כעת, אם $x = n \in \mathbb{Z}$, אז $f(n) = n \in A$. לכן מהתנאי, $n-1 \in A$. נקבל ש $n \in (n-1, n+\frac{1}{2}) \subseteq f^{-1}(A)$, כי כל איבר בקטע הנ"ל, הארך השלם שלו הוא או $n-1$ או n. בכל מקרה, קיבלנו שלכל $x \in f^{-1}(A)$ יש סביבה פתוחה שמוכלת ב$f^{-1}(A)$ ולכן $f^{-1}(A)$ פתוחה ב$\mathbb{R}$, כלומר, A פתוחה בטופולוגיית המנה.

(ב) הסיקו כי $\tau = \{\mathbb{Z}, \emptyset\} \cup \{(-\infty, M] \cap \mathbb{Z}, M \in \mathbb{Z}\}$
הוכחה:

ברור שכל הקבוצות בסעיף ב' עונות על התנאי מסעיף א' ולכן פתוחות. מצד שני, תהי O שעונה על התנאי מסעיף א'. אם $O = \emptyset$, סיימנו. אחרת, יש $x \in O$. אם קבוצת האיברים בO אינה חסומה, אז לכל $m \in \mathbb{Z}$ יש $m < n$ כך ש $n \in O$. לפי התנאי, זה אומר ש $m \in O$. נקבל ש $O = \mathbb{Z}$. אחרת, נקח את האיבר המקסימלי בO. נסמנו בM. (נשים לב שלכל קבוצה חסומה ב$\mathbb{Z}$ יש מקסימום). אז לפי התנאי ברור ש $(-\infty, M] \cap \mathbb{Z} \subseteq O$. מצד שני, לכל $M \geq n$, $n \notin O$, כי M הוא המקסימום. לכן, $O = (-\infty, M] \cap \mathbb{Z}$. כלומר, $\tau = \{\mathbb{Z}, \emptyset\} \cup \{(-\infty, M] \cap \mathbb{Z}, M \in \mathbb{Z}\}$.

7. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) יהיו X, Y מרחבים מטריים, ו $f : X \to Y$ ו$g : Y \to X$ פונקציות רציפות, כך ש $f \circ g = id_Y$. הוכיחו כי f העתקת מנה.
הוכחה:

ראשית, מכך ש $f \circ g = id_Y$ נובע שf על. מכיוון ש f רציפה, אם $O \subseteq Y$ פתוחה, אז $f^{-1}(O)$ פתוחה. כעת נראה את הכיוון השני. תהי $O \subseteq Y$ כך ש $f^{-1}(O)$ פתוחה. g רציפה ולכן $g^{-1}(f^{-1}(O)) \subseteq Y$ פתוחה. אבל $g^{-1}(f^{-1}(O)) = (f \circ g)^{-1}(O) = id_Y^{-1}(O) = O$. כלומר, O פתוחה.

(ב) תהי $f : X \to Y$ העתקת מנה. הוכיחו שf הומיאומורפיזם $\iff$ f חח"ע.
הוכחה:

$\Longleftarrow$ אם f הומיאומורפיזם, אז בפרט f חח"ע.

$\Longrightarrow$ אם f חח"ע ומנה אז נקבל ש f חח"ע ועל ורציף. נוכיח שf פתוח. יהי $O \subseteq X$ פתוח. מכיוון שf חח"ע ועל, $O = f^{-1}(f(O))$. לכן, מהגדרת העתקת מנה, $f(O)$ פתוח. מש"ל.