מערך תרגול 11 אינפי 1 למדמ"ח

תרגיל 11.1 הוכיחו בשפה של ϵ, δ שאם $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ אז $\lim\limits_{x\to c}(af(x)) = aL$.

פתרון: אם $a = 0$ הטענה ברורה. נניח $a \neq 0$. יהי $\epsilon > 0$. מטרה: למצוא $\delta > 0$ כך ש $0 < |x-c| < \delta$ גורר $|af(x) - aL| < \epsilon$.

נשים לב ש

$$|af(x) - aL| = |a||f(x) - L|$$

אנחנו רוצים שיתקיים

$$|a||f(x) - L| < \epsilon$$

כלומר:

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|a|}$$

אבל היות ש $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ אנחנו יודעים שיש $0 < \delta$שעבורו $0 < |x-c| < \delta$ גורר ש:

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|a|}$$

כלומר עבור ערך δ זה יתקיים ש $0 < |x-c| < \delta$ גורר ש

$$|af(x) - aL| < \epsilon$$

כנדרש.

תזכורת 11.2 פונקציה f נקראת רציפה במידה שווה בקטע $I \subset \mathbb{R}$ אם לכל $x, y \in I^*$ כך ש $x \approx y$ מתקיים $f(x) \approx f(y)$.

ההבדל מרציפות רגילה: גם x וגם y הם היפרממשיים.

תזכורת 11.3 רציפות במ"ש גוררת רציפות רגילה.

תזכורת 11.4 (משפט היינה קנטור) פונקציה רציפה בקטע סגור רציפה בו במ"ש.

תרגיל 11.5 בדקו האם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש בקטע הנתון:

1. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ בקטע $(0,1)$.

פתרון: נבחר שני מספרים היפר ממשיים $x = \frac{1}{\ln H}$ ו $y = \dfrac{1}{\ln(H+1)}$. שניהם אינפיניטיסימלים, ולכן כמובן ש $x \approx y$. אבל

$$f(x) = e^{\ln H} = H$$

$$f(y) = e^{\ln(H+1)} = H + 1$$

כמובן ש $f(x) \not\approx f(y)$. ולכן הפונקציה לא רציפה במ"ש.

2. $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ בקטע $(0,1)$

פתרון: ראשית נשים לב שהפונקציה רציפה בקטע. אבל רציפות כמובן לא מבטיחה רציפות במ"ש.כעת נרחיב את הפונקציה לקטע הסגור $[0,1]$ באופן הבא:

$$g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

אנו טוענים שגם $g(x)$ רציפה. בכל נקודה $x \neq 0$ ברור ש$g(x)$ רציפה. נוודא שהפונקציה רציפה גם ב $x = 0$, כלומר, נוודא ש:

$$\lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

ואכן אם ϵ אינפיניטיסימל חיובי אז

$$\epsilon\sin\frac{1}{\epsilon}$$

הוא גם כן אינפיניטיסימל (מפני ש $\sin\frac{1}{\epsilon}$ הוא מספר סופי).

ולכן באמת

$$\lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

כלומר $g(x)$ רציפה ב $[0,1]$. היות שזה קטע סגור, $g(x)$ רציפה בו במידה שווה (לפי משפט קנטור). לכן $g(x)$ רציפה במ"ש ב $(0,1)$. (אם פונקציה רציפה במ"ש בקטע מסוים, היא רציפה במ"ש בכל תת קטע).

אבל עבור $x \in (0,1)$ מתקיים $f(x) = g(x)$ כלומר: בקטע $(0,1)$ $g(x)$ ו $f(x)$ הן אותה פונקציה ולכן $f(x)$ רציפה במ"ש ב $(0,1)$.

3. $f(x) = \sin x$ בכל $\mathbb{R}$

פתרון: נוכיח רציפות במ"ש לפי הגדרה: יהיו x, y שני מספרים היפרממשיים כך ש $x \approx y$. אז

$$\sin x - \sin y = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$$

נשים לב ש

$$2\cos(\frac{x+y}{2})$$

הוא מספר סופי ו

$$\sin(\frac{x-y}{2})$$

הוא אינפיניטיסימל (כי $x - y$ אינפיניטיסימל) ולכן בסה"כ המספר $\sin x - \sin y$ אינפיניטיסימל ולכן הפונקציה רציפה במ"ש.

4. $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ בקטע $(0,1)$

פתרון: כמו קודם, נבחר שני מספרים אינפיניטיסימלים שבשבילם הערך של $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ אינו קרוב אינפיניטיסמלית. אם H היפרשלם אז נבחר

$$x_1=\frac{1}{2\pi H}\quad x_2=\frac{1}{2\pi H+\frac{\pi}{2}}$$

ואז

$$f(x_1)=2\pi H\sin 2\pi H=0$$

$$f(x_2)=(2\pi H+\frac{\pi}{2})\sin(2\pi H+\frac{\pi}{2})=2\pi H+\frac{\pi}{2}$$

כמובן ש

$$f(x_1)\not\approx f(x_2)$$

ולכן f אינה רציפה במ"ש בקטע הנתון.

תרגיל 11.6 נניח ש $f(x)$ ו $g(x)$ רציפה במ"ש בקטע I. האם $f(x)\cdot g(x)$ גם רציפה במ"ש?

פתרון: לא בהכרח. נניח $f(x)=g(x)=x$ ב $\mathbb{R}$. אפשר להוכיח שהם רציפות במ"ש (תרגיל לבית). אבל מכפלתם היא x^2 שזו לא פונקציה רציפה במ"ש.

תרגיל 11.7 נניח ש $f(x),g(x)$ רציפות במ"ש ב $\mathbb{R}$. האם הרכבתן $f(g(x))$ רציפה במ"ש ב$\mathbb{R}$?

פתרון: כן. אם $x\approx y$ אז גם $g(x)\approx g(y)$ (רציפות במ"ש של g) ולכן גם $f(g(x))\approx f(g(y))$ (רציפות במ"ש של f) ולכן גם ההרכבה רציפה במ"ש כנדרש.

תרגיל 11.8 חשבו את הגבולות הבאים:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$

פתרון: לפי לופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1}=1$$

2. $\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}$

פתרון: $\arctan x$ תמיד סופי ולכן הגבול הוא כמובן 0

3. $\lim_{x\to\infty}x(\arctan x-\frac{\pi}{2})$

פתרון: לפי לופיטל:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{1+x^2}=-1$$